



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ИНСТИТУТ СФЕРЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА  
(ФИЛИАЛ) ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
В Г.ШАХТЫ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ  
(ИСОиП (ФИЛИАЛ) ДГТУ)**

***В.Г. Сапогин, Н.Н. Прокопенко***

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
ИНДУКТИВНОСТЕЙ С ВЫСОКОЙ ОБЪЁМНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ  
ДЛЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ МИКРОННЫХ И НАНОТЕХНОЛОГИЙ**

**Монография**

Ростов-на-Дону 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	5
<b>Глава 1. Анализ публикаций по расчётам индуктивностей в микроскопических размерах и их практической реализации</b> .....	24
1.1. Выводы по главе 1.....	35
<b>Глава 2. Аналитический метод расчёта статической планарной индуктивности для нулевого фазового сдвига между током и потоком</b> .....	37
2.1. Магнитные и индуктивные свойства планарного токового 2D-кольца с азимутальным направлением плотности тока.....	53
2.1.1. Распределение магнитного поля внутри кольцевого тока.....	53
2.1.2. Распределение магнитного поля вне кольцевого тока.....	61
2.1.3. Поточковая часть индуктивности плоского токового кольца с конечной радиальной толщиной.....	69
2.1.4. Добротность поточковой части индуктивности.....	79
2.1.5. Моделирование частотных свойств индуктивности токового кольца в симуляторе HFSS – Ansoft. Сравнение результатов с экспериментами.....	80
2.1.6. Выводы по разделу 2.1.....	85
2.2. О расчёте коэффициента увеличения планарной индуктивности 2D-спиралей Архимеда и обобщённых спиралей.....	86
2.2.1. Физико-математическая модель расчёта.....	87
2.2.2. Магнитное поле тока и индуктивность спирали Архимеда.....	87
2.2.3. Магнитное поле тока и индуктивность обобщённой спирали.....	89
2.3. Выводы по разделу 2.2.....	91
<b>Глава 3. Разработка алгоритмов расчёта погонных 3-D индуктивностей цилиндрической симметрии с аксиальной плотностью токов и метод управления их значением</b> .....	92
3.1. Магнитные и индуктивные свойства полого и круглого цилиндрических проводников.....	92
3.1.1. Распределение магнитных полей бесконечно длинного круглого проводника с током.....	92
3.1.2. Индуктивность сплошного цилиндрического проводника с током. Параметр обрезания поля.....	94
3.1.3. Распределение магнитных полей бесконечно длинного трубчатого проводника с током.....	96
3.1.4. Индуктивность трубчатого проводника. Параметр обрезания поля.....	98
3.1.5. Добротность индуктивности цилиндрического проводника.....	100
3.1.6. Выводы по разделу 3.1.....	101
3.2. О методе управления погонной индуктивностью коаксиального кабеля с аксиальной плотностью токов.....	102
3.2.1. Физико-математическая модель расчёта.....	102

3.2.2. Распределение векторного потенциала внутри коаксиального кабеля.....	103
3.2.3. Распределение индукции магнитного поля внутри коаксиального кабеля.....	105
3.2.4. Управление индуктивностью коаксиального кабеля для сонаправленных и встречных токов.....	106
3.3. Выводы по разделу 3.2.....	109
<b>Глава 4. Разработка аналитических методов расчёта интегральных индуктивностей для микросхем и систем на кристалле .....</b>	<b>111</b>
4.1. Индукционные и индуктивные свойства проводящего цилиндра с азимутальной плотностью вихревого тока.....	111
4.1.1. Физико-математическая модель расчёта. Две ориентации силовых линий вихревого электрического поля.....	111
4.1.2. Энергетический баланс в системе.....	121
4.1.3. Частотная зависимость вносимой интегральной индуктивности трубчатого проводящего цилиндра.....	122
4.1.4. Основные физические параметры цилиндров с малой радиальной толщиной.....	123
4.1.5. Расчёты величины вносимой индуктивности проводящего цилиндра конечной толщины.....	124
4.1.6. Выводы по разделу 4.1.....	126
4.2. Учёт влияния диамагнитных свойств токов Фуко и омических потерь на значение вносимой индуктивности.....	127
4.2.1. Физико-математическая модель расчёта.....	127
4.2.2. Частичный учёт диамагнитных свойств токов Фуко.....	129
4.2.3. Энергетический баланс системы.....	130
4.2.4. Индуктивные свойства сплошного немагнитного цилиндра.....	131
4.2.5. Оценки вносимой индуктивности в низкочастотной области.....	132
4.2.6. Оценки отрицательной вносимой индуктивности в среднечастотной области.....	134
4.2.7. Оценки вносимой индуктивности в крайне высокочастотной области.....	136
4.2.8. Полный учёт диамагнитных свойств токов Фуко и их влияние на частотную зависимость индуктивности.....	137
4.3. Выводы по разделу 4.2.....	140
<b>Глава 5. Теоретические исследования физических свойств индуктивности ленточных микро-соленоидов и способа увеличения их граничной частоты.....</b>	<b>143</b>
5.1. Индуктивные свойства ленточных микро-соленоидов.....	143
5.2. Эталонная индуктивность и индуктивности с малым и большим потокосцеплением.....	145
5.3. Добротность и плотности индуктивности соленоида в микро- и наноразмерах.....	146

5.4. О способе увеличения граничной частоты ленточного микросоленоида.....	150
5.5. Выводы по главе 5.....	154
<b>Глава 6. Физические свойства планарной индуктивности типа «проводящая наноплётка в токовом кольце».....</b>	<b>157</b>
Заключение.....	168
Список использованной литературы.....	170

## ВВЕДЕНИЕ

Исследованием физических свойств индуктивности, её проектированием и созданием человечество стало заниматься активно после изобретения радио Поповым и Маркони. В последние три десятилетия одно из направлений исследований было ориентировано на создание индуктивности микроскопических размеров для радиотехнических цепей ВЧ и СВЧ диапазона.

В наше время требования к индуктивности очень противоречивые: она должна иметь малые геометрические размеры (сотни микрон и меньше), быть относительно большой по значению до 10 нГн и выше, иметь малую стоимость и удовлетворять огромное количество разнообразных заказчиков своим значением добротности и частотным диапазоном. Ибо в хорошей индуктивности нуждаются все, начиная от проектировщиков сложных функциональных блоков, до специалистов, создающих самые маленькие ВЧ и СВЧ – системы на кристалле.

Уменьшение объёма интегральных микросхем привело к попыткам создания планарных индуктивностей в 60-х годах прошлого века. Поскольку первые планарные индуктивности пришлось делать на печатных платах, то конструкторы и технологи столкнулись с новыми проблемами по их воплощению. Было обнаружено, что паразитные ёмкости индуктивности, лежащей на подложке, ограничивают диапазон рабочих частот, а её эквивалентное сопротивление ограничивает собственную добротность индуктивности (см. обзор [1]).

Применение технологии GaAs и сапфировых кристаллов к концу 80-х позволило создать спиральные индуктивности порядка 25 нГн с частотой собственного резонанса более 3 ГГц. Индуктивности имели геометрические размеры до 500 мкм. Реализация планарной индуктивности на кремниевом кристалле [2] дала собственный резонанс индуктивности на частоте 2,47 ГГц при номинальном значении 9,3 нГн. Индуктивность имела плоскую квадратную форму с 9-ю витками при линейном размере 230 мкм. Ширина токопровода составила 6,5 мкм, а расстояние между полосками – 5,5 мкм. Максимальная добротность индуктивности оказалась равной 3.

Моделирование объёмных интегральных структур в начале 90-х позволило перейти к разработке КМОП – устройств (английская аббревиатура CMOS - *Complementary Metal Oxid Semycondactor*) с использованием планарных индуктивностей ещё меньших размеров. В [3] для маломощного усилителя в диапазоне частот 800 – 900 МГц была реализована спиральная индуктивность по КМОП – технологии с двумя слоями металла на кремниевом кристалле. В этом частотном диапазоне индуктивность в цепи нагрузки составляла от десятков до сотен нГн и имела толщину около 2 мкм.

В настоящее время в мире в среднем появляется более 1000 работ по индуктивности каждые пять лет. Их можно разделить на несколько направлений исследований. Одно из направлений – это патенты, взятые на индуктивность, либо статьи, в которых обычно исследуются частотные свойства разнообразных индуктивностей. Обычно это одиночные токовые индукторы, разработанные технологами для интегральных микросхем, либо для систем на кристалле.

Токовым индуктором далее будем называть устройство, принадлежащее к интегральной индуктивности, выполненное из одного проводника, разнообразной геометрической формы и расположенное на планарной поверхности. Индуктором можно называть планарные квадратные, прямоугольные и спиральные катушки индуктивности, находящиеся на изолированной подложке, либо на кристалле. Индуктором могут быть отдельные планарные проводники прямоугольного и круглого поперечного сечения, одновитковые кольца, соленоиды, микро-соленоиды, а также индуктивности, выполненные либо в виде шестиугольника, октаэдра, додекаэдра и других многоугольных проникающих геометрий.

Статьи обычно содержат информацию о частотных зависимостях индуктивности и добротности, которые дают возможность заказчикам отобрать из многочисленных патентов то, что им требуется. Иногда в таких работах приводятся эмпирические расчётные формулы и формулы, полученные замещением интегральной индуктивности схемами с сосредоточенными параметрами, по которым можно рассчитать значения индуктивности исследуемой конкретной геометрии. Практически во всех патентах геометрические размеры индуктивности не приводятся. Это считается ноу-хау патента.

Замечательное свойство любого планарного индуктора заключается в том, что его индуктивность и добротность часто зависят от частоты. При этом обычно зависимость получается такой, что при низких частотах положительная индуктивность индуктора принимает значение, близкое к статическому значению, а при высоких частотах она начинает увеличиваться до тех пор, пока не достигнет частоты среза (граничной частоты).

Обнаружены и другие виды частотных зависимостей индуктивности для определённого диапазона частот. Вначале добротность и индуктивность индуктора увеличиваются, а затем плавно уменьшаются. В последние годы американские исследователи обнаружили существование частотно-независимых индуктивностей сверхтонких проводящих слоёв (Al+Cu толщиной от 200 нм), работающих в определённом диапазоне частот [4].

В работе [5] приведены частотные зависимости индуктивности ленточных, уже ставших классическими, микро-соленоидов диаметром 800 мкм длиной от 1,6 до 2,4 мм с количеством витков от 4-х до 6-и,

используемых в мощных выходных каскадах. В них всегда наблюдают одно и то же явление. На малых частотах индуктивность совпадает со своим статическим значением, оставаясь постоянной. Потом на низких частотах появляется дребезг индуктивности, который связан с механическим резонансом, возникающим на продольных механических колебаниях упругих витков катушки. Сами механические колебания обусловлены притяжением витков друг к другу из-за действия в соседних витках сонаправленных токов Ампера. Такое притяжение возникает на каждом полупериоде переменного тока. При дальнейшем увеличении частоты до значений частоты среза индуктивность увеличивается на порядок, а затем скачком теряет свои индуктивные свойства.

Увеличение индуктивности свёрнутой ленты микро-соленоида с ростом частоты можно объяснить только увеличением линейной плотности тока, протекающего в ленте. Это возможно только в том случае, если переменный ток в ленте образует тонкий шнур, диаметр которого становится меньше, чем продольная ширина ленты. С приближением частоты тока к частоте среза токовый шнур «исчезает» и соленоид теряет свои индуктивные свойства.

Объяснить причины уменьшения диаметра токового шнура на СВЧ можно только на языке сил, удерживающих цилиндрический шнур. С ростом частоты внешний источник вбрасывает в соленоид всё меньше и меньше одноимённых зарядов, образующих ток, за полупериод изменения последнего. Это снижает объёмную плотность кулоновских сил расталкивания, действующих между движущимися в одном направлении зарядами. В то же время объёмная плотность стягивающих (амперовских) сил либо не изменяется, либо уменьшается с частотой медленнее, чем силы кулоновского взаимодействия. Частота среза приходится на тот момент, когда шнур начинает катастрофически сжиматься в пинч. В этот момент зарегистрировано, что индуктивность одиночного индуктора резко возрастает, а затем соленоид теряет свои индуктивные свойства.

Ключевая работа по упомянутым физическим свойствам, проявляемым планарными индукторами на гигагерцах, вышла в 2001 году. Kuhn и Ibrahim [6], исследуя экспериментально протекание тока на высоких частотах в одиночных многовитковых квадратных, прямоугольных и спиральных индукторах, обнаружили эффект, прямо противоположный скин-эффекту. Переменный ток на гигагерцах образовывал локализованный в пространстве токовый шнур в проводнике индуктора с любой геометрией.

С ростом частоты токовый шнур уменьшал площадь своего поперечного сечения. Это приводило к тому, что омическое сопротивление и индуктивность индуктора увеличивались с частотой, а протекание переменного тока уже не подчинялось закону Ома. Такое шнурование тока высокой частоты было ими названо “Current Crowding Effects” (эффекты

токового сжатия). Дальнейшее увеличение частоты переменного тока приводило к ещё большей локализации токового шнура, которое обычно заканчивалось катастрофой. При приближении частоты тока к частоте среза токовый шнур сжимался в пинч, становился неустойчивым, и одиночный индуктор любой геометрии терял свои индуктивные свойства.

В мае 1999 года Yue и Wong, сотрудники Стенфордского университета, опубликовали ещё одну ключевую работу [7], в которой предложили принципиально новое технологическое решение для построения разнообразных планарных индуктивностей. Они исследовали три варианта планарного размещения спирального индуктора, кремниевой подложки и экрана (сплошного, либо узорчатого). В первом варианте они поместили планарный прямоугольный спиральный индуктор на поверхность кремниевой платформы без металлического экрана и назвали его *NGS* (No Ground Shield).

Во втором варианте для экранировки магнитного поля спирали в направлении, противоположном подложки был добавлен сплошной экран. Конструкция была названа *SGS* (Solid Ground Shield). В третьем варианте сплошной экран был заменён на узорчатый экран. Такая конструкция была названа индуктор *PGS* (Patterned Ground Shield). Две технологические конструкции (*NGS* и *PGS*) обнаружили частотные свойства индуктивности и добротности, которые принципиально отличались от частотных свойств индуктивности и добротности одиночных индукторов. Они давали растущие частотные зависимости индуктивности и добротности, которые достигали максимума на частоте около 2-х гигагерц и затем спадали к нулю на частотах около 7-8 ГГц. Как известно, нуль добротности индуктивности соответствует нулю индуктивности.

Итальянскими технологами в 2002 году в работе [8] была создана планарная индуктивность, которая отличалась от исследованной в [7], цилиндрической геометрией. В ней цилиндрическая спираль была нагружена на слоистую цилиндрическую структуру, состоящую из модифицированных слоёв кремния, лежащего на проводящей медной подложке. Узорчатый экран имел радиальную структуру. Эксперименты не только подтвердили ход частотных зависимостей индуктивности и добротности, найденные в [8], но и обнаружили тот факт, что на гигагерцах индуктивность *RPGS* - индуктора (Radial Patterned Ground Shield) может обратиться в нуль, а на более высоких частотах даже стать отрицательной.

Другой вид частотных характеристик *PGS*-индукторов [7,8] можно объяснить тем, что силовые линии его магнитного поля были нагружены на плёнку из модифицированных слоёв кремния, которая прилегала к спиральному индуктору. Ток индуктора создавал своё переменное магнитное поле и магнитное поле отклика, формируемое токами Фуко, в полупроводящем веществе. Взаимодействие тока индуктора с суммарным



магнитным полем изменяло частотную характеристику *PGS*-индуктора так сильно, что проблемы частоты среза в них не возникало. Ниже в отчёте получен теоретический вид частотных характеристик индукторов, нагруженных на проводящую плёнку, и впервые объяснены физические причины такого существенного изменения вида частотных характеристик различных *PGS*-индукторов.

Но термин «отрицательная индуктивность» оказался для технологов, работающих на СВЧ, таким фантастическим и непонятным, что измерения итальянцев многими технологами были поставлены под сомнение. Вероятно поэтому, в своей монографии [8], выпущенной значительно позже, они совсем отказались от приоритета в собственном открытии и даже не упомянули о нём.

Причины такого отказа от приоритета в интереснейшем физическом явлении, возможно, кроются в том, что отрицательная индуктивность не вписывается в привычные понятия, которые формируются при использовании мощного вспомогательного средства расчёта СВЧ цепей. Речь идёт о диаграмме Смита, который бесконечную комплексную плоскость свернул с помощью конформного отображения в плоскость, ограниченную единичным кругом. Эта диаграмма позволяет рассчитывать комплексные сопротивления СВЧ цепей, которые могут быть представлены двухполюсниками или четырёхполюсниками. Такие расчёты импеданса, или адмитанса, позволяют создавать самые разнообразные активные и пассивные устройства, согласующие СВЧ генераторы с нагрузкой.

Обычно согласование СВЧ генератора с нагрузкой характеризуется комплексным коэффициентом отражения, который связан с входным сопротивлением и характеристическим сопротивлением линии передачи. Приведённое сопротивление позволяет выразить активную и реактивную часть, используемую в диаграмме Смита, через параметры, которые часто называют  $S$  – параметрами. Параметр  $S_1$  характеризует приведённое активное сопротивление согласующей линии, а параметр  $S_2$  характеризует приведённое реактивное сопротивление согласующей линии.

Физическая трактовка приведённых коэффициентов Смита  $S_1$ ,  $S_2$  позволяет различать комплексные сопротивления, которые носят либо ёмкостной, либо индуктивный характер. При ёмкостном характере  $S_2 < 0$ , а при индуктивном  $S_2 > 0$ . Диаграмма Смита может включать в свою трактовку даже отрицательные активные сопротивления ( $S_1$  может быть меньше 0), но не даёт никакой возможности включить в свой арсенал физическое понятие «отрицательная индуктивность». По мнению прикладников, индуктивность приобретёт ёмкостной характер. Но термины: ёмкостной характер, индуктивный характер, индуктивность и ёмкость, – описывают разные физические понятия.

Позднее американские технологи из штата Огайо снова натолкнулись на тот факт, что многослойная интегральная индуктивность, выполненная в виде спирали, нагруженной на сверхтонкие проводящие слои из алюминия и меди (толщиной больше 2 мкм), в мегагерцовом диапазоне частот может стать отрицательной. Они, в отличие от итальянских коллег, смело патентуют способ формирования такого класса многослойных индуктивностей [4].

Микроскопическая нега-индуктивность (negainductance) может быть использована в новейших технологиях создания, как интегральных микросхем, так и систем на кристалле. Прежде всего, её можно использовать в качестве пассивного компенсатора паразитных индуктивностей радиотехнических цепей в ЧИПах и интегральных микросхемах.

Нега-индуктивность может стать новым звеном активной или пассивной радио- или электротехнической цепи. Малоизвестные физические свойства нега-индуктивности будут исследоваться конструкторами и технологами в ближайшие 30-40 лет.

**В пособии** впервые показано, что отрицательная индуктивность появляется только в том случае, когда силовые линии магнитного поля одиночного индуктора нагружены на проводящее или полупроводящее вещество. Индуктивность, проявляющая такие свойства, названа нами вносимой. Частотная зависимость вносимой индуктивности всегда имеет нули на двух характеристических частотах. Нули индуктивности делят весь частотный диапазон на три интервала: низкочастотный, среднечастотный и высокочастотный. В среднечастотном диапазоне она всегда отрицательна. Мы считаем, что её новые физические свойства объясняются частотно-зависимым магнетизмом токов Фуко.

Расчёты, выполненные для различных проводящих материалов тонких пленок, показывают, как можно перемещать первый ноль индуктивности внутри частотного диапазона от 1 МГц до 10 ТГц, изменяя проводимость цилиндрической плёнки и её геометрические размеры. Отличительным свойством вносимой индуктивности является то, что на очень высоких частотах она перестаёт зависеть от частоты, принимает постоянное положительное значение равное одной трети от масштаба и не имеет граничной частоты. Используя такую индуктивность, технолог будет иметь широкий набор значений разнообразных плёночных индуктивностей, выполненных по единой технологии и работающих на разных фиксированных частотах.

Чтобы убедиться в том, что индуктивность может принимать отрицательное значение не только в микроскопических размерах, но и в макроскопических, мы провели простые эксперименты. Были плотно намотаны в один слой три катушки на картонном каркасе радиусом 3,5 мм медным проводом диаметром 0,23 мм. Первая катушка содержала 98

витков, вторая – 100 витков, а третья – 200 витков. Прибор В7-80 в режиме измерения индуктивности показал: первая катушка имела индуктивность 19,7 мкГн, вторая – 22,1 мкГн, а третья – 44,9 мкГн. Расчёты по формулам бесконечно длинного соленоида дали: для первой индуктивности 20,6 мкГн, для второй 21,0 мкГн и 42,0 мкГн для третьей. Они оказались очень близкими к измеренным значениям и укладывались в 7% диапазон погрешности измерений.

Затем в эти катушки был помещён латунный стержень диаметром 6,9 мм так, чтобы он заполнял всё внутреннее пространство каждой отдельной катушки. Силовые линии магнитного поля катушек нагрузились на латунь. Тем же прибором были замерены новые индуктивности. Они изменили свои значения. Первая катушка 9 мкГн, вторая катушка 9,6 мкГн, третья катушка 19,8 мкГн. Как видно из приводимых значений, индуктивности всех катушек уменьшились. Этот факт можно объяснить только тем, что введение проводящего вещества – латуни вносит отрицательную индуктивность. Легко вычислить её значение для трёх катушек: индуктивность в латуни первой катушки имела отрицательное значение: – 10,7 мкГн, второй катушки: –12,5 мкГн, а третьей катушки: – 25,1 мкГн.

Вычисление средней объёмной плотности отрицательной индуктивности латуни (на сто витков соленоида) даёт значение, достигнутое в проведённом эксперименте: – 13,5 Гн/м<sup>3</sup>. Результаты эксперимента приводят к мысли, что отрицательная индуктивность – это не измерительный миф технологов, а проверенное исследователями в разное время и в разных местах земного шара доказательство того, что нега-индуктивность (negainductance) – обоснованная физическая реальность.

В настоящее время для аналоговых микросхем СВЧ-диапазона используют варианты интегральной индуктивности, выполненной в виде проводящих полосок прямоугольного поперечного сечения, которым придана круглая или прямоугольная форма спирали. Технология позволяет получать индуктивности от единиц до сотен микрогенри в масштабе занимаемой площади 500х500 мкм со многими слоями.

Уменьшение же геометрических размеров таких одиночных индукторов до квадрата 100х100 мкм в одном слое приводит к уменьшению достигаемых значений индуктивности от 1 до 10 нГн с добротностью от 2-5. Подстройка индуктивностей может осуществляться запайкой перемычек контактных площадок, прилегающих к индуктору. Малые индуктивности (до единиц наногенри) выполняются в виде прямого проводника прямоугольного сечения малой длины, либо петли в форме круга или квадрата.

В 70 – х годах прошлого века Калантаров П.Л. и Цейтлин А.А. разработали математические методы расчёта, которые базировались на

геометрической теории индуктивности [9]. Эта теория исходила из положения, что индуктивность катушки любой геометрии с любым количеством витков зависит только от числа витков, её геометрии и занимаемого объёма. Предполагалось, что индуктивность не зависит как от геометрии растекания тока в проводящем пространстве, также и от зависимости плотности тока от поперечных координат.

Так, например, индуктивность кольца описывается одной формулой, зависящей от геометрических размеров кольца. Недостаток формулы заключается в том, что в микрометрическом диапазоне геометрических размеров для некоторых колец можно получить отрицательное значение индуктивности. Они выпадают из определения индуктивности геометрической теории.

Современные методы расчёта индуктивностей сводятся к замене интегральной индуктивности схемой сегментации с сосредоточенными параметрами. В таком сегментировании возможно применение расширенных и компактных моделей, подгоночные параметры  $L$ ,  $C$  и  $r$  которых подбираются при компьютерной оптимизации. При этом, номиналы сопротивлений, индуктивностей и паразитных емкостей получают путём суммирования последовательно соединённых элементов. Такой метод расчёта требует применения симуляторов (Систем Автоматизированного Проектирования) электрических схем, таких как HSPICE или Touchstone.

Как было выяснено, построение модели на сосредоточенных параметрах – самый быстрый метод моделирования, применяемый на практике. Его большой недостаток – отсутствие учёта толщины микрополоскового проводника, который проявляется в том, что реактивные сопротивления катушки индуктивности могут иметь на определённых частотах расходящиеся значения.

За последние 40 лет появилось огромное число систем автоматизированного проектирования, позволяющие рассчитать интегральные индуктивности практически любых геометрий для любых частот. Конкуренция среди вычислительных технологий огромная. Мы не будем заниматься их сравнительными характеристиками. Скажем только, что для одной и той же индуктивности разные системы САПР дают разные результаты, которые совпадают с точностью от 20% до 50%. Причина этого в том, что математические модели и расчётные методы, применяемые в разных САПР, существенно отличаются друг от друга.

Здесь следует упомянуть о самой мощной и очень развитой системе математического моделирования HFSS (High Frequency Structural Simulator) фирмы ANSYS Inc., которая применяется для проектирования встроенных в кристалл пассивных элементов, корпусов интегральных схем, разводки печатных плат, антенн и согласующих СВЧ-устройств.

Она базируется на электродинамическом моделировании трёхмерных СВЧ-структур методом конечных элементов (МКЭ). МКЭ – численный метод решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также интегральных уравнений, возникающих при решении задач прикладной физики. Широко используется также для решения задач электродинамики.

На наш взгляд, достоинство метода перед общеизвестными САПР заключается в том, что при расчёте интегральной индуктивности он учитывает влияние на конечное значение индуктивности геометрических размеров проводящего экранного (охранного) контура. Как известно, при проектировании пассивных элементов в малых размерах на кристалле необходимо их экранирование от воздействия электромагнитных полей соседних приборов.

Поразительно, но в монографии [10] можно узнать о том, что интегральные индуктивности в типовом КМОП процессе для современных технологий систем на кристалле делают только в виде плоских квадратных спиральных катушек на основе верхних слоёв металла. При этом в расчётах таких катушек снова используют метод сосредоточенных параметров её эквивалентной схемы. В формулу для добротности такой катушки входит толщина скин-слоя и два подгоночных параметра, которые учитывают коэффициенты омических потерь и потерь на излучение. Влияние на расчёты экранирующего проводящего контура никак не учитывается. Как будто его там нет. Приводимое значение интегральной индуктивности на площади  $110 \times 110$  мкм для частоты 2 ГГц, выполненное на пяти слоях, составляет значение 11,4 нГн с добротностью 3,4.

Метод HFSS, как и другие методы, имеет некоторые недостатки. К ним можно отнести тот факт, что при разбиении на конечные элементы используются только класс функций, которые обращаются на границе конечного элемента в нуль. Это позволяет стыковать конечные элементы друг с другом, но сильно сужает возможные классы функций, которые могут удовлетворять граничным условиям для тех же уравнений в частных производных. Они будут давать уже другие числовые результаты.

Второй недостаток заключается в том, что невозможно узнать какие конкретные уравнения математической физики решаются в любой программе моделирования. Это ноу-хау программного обеспечения. Но, ведь только из вида уравнений можно определить адекватность математической модели конкретному физическому процессу протекания и геометрии высокочастотного тока в индуктивности.

Ещё один недостаток метода заключается в том, что программы последних лет не учитывают в своих расчётах современные физические явления протекания тока на высоких частотах в проводниках, в которых может возникать не только скин-эффект, но и возможно шнурование тока.

Несмотря на перечисленные недостатки, он является достаточно точным методом численного моделирования. В пособии мы сравнивали полученные нами результаты аналитических вычислений некоторых индуктивностей высокой симметрии с результатами, полученными методом HFSS.

Как известно, в интегральных микросхемах СВЧ диапазона различают индуктивности с сосредоточенными и распределёнными параметрами. Считается, что элемент с сосредоточенными параметрами имеет максимальный геометрический размер длины  $l$  значительно меньший, чем длина волны  $\lambda$  в линии. В этом случае можно пренебречь фазовым сдвигом на длине элемента. В противоположном случае индуктивность считается элементом с распределёнными параметрами.

Характерный геометрический размер индуктивности, разрабатываемый в микросхемах и КМОП устройствах, имеет верхнее значение около 250 мкм. Эти индуктивности работают на частоте порядка 1 ГГц. Длина волны, соответствующая этой частоте, равна 1,88 м. Она отличается от характерного геометрического размера микроскопической индуктивности в тысячи раз. Это указывает на то, что все микроскопические индуктивности относятся к элементам с сосредоточенными параметрами и фазовый сдвиг у них между током и потоком остаётся нулевым до очень высоких частот порядка 1 ТГц. Этот факт мы используем в наших расчётах.

$3D$  – микро-индуктивность, как интегральный элемент цепи, проявляет свои индуктивные свойства, которые обусловлены несколькими аспектами: топологией, геометрией, занимаемым объёмом индуктора, числом витков, геометрией растекания плотности тока в индукторе и самое важное свойство – нагружены ли силовые линии магнитного поля индуктора на вещество, которое может проявлять магнитные или проводящие свойства.

Для пояснения сказанного обсудим простой пример. На рис. 1 приведён полый проводящий цилиндр одиночного индуктора с аксиальным направлением плотности тока  $j_1$ . Как показано в [9], его индуктивные свойства зависят от геометрических размеров цилиндра: внутреннего радиуса  $R_1$ , внешнего радиуса  $R_2$ , и высоты цилиндра  $h$ . Но, в отличие от [9], такой полый цилиндр может иметь три разных статических значения индуктивности (в [9] приведено только одно).

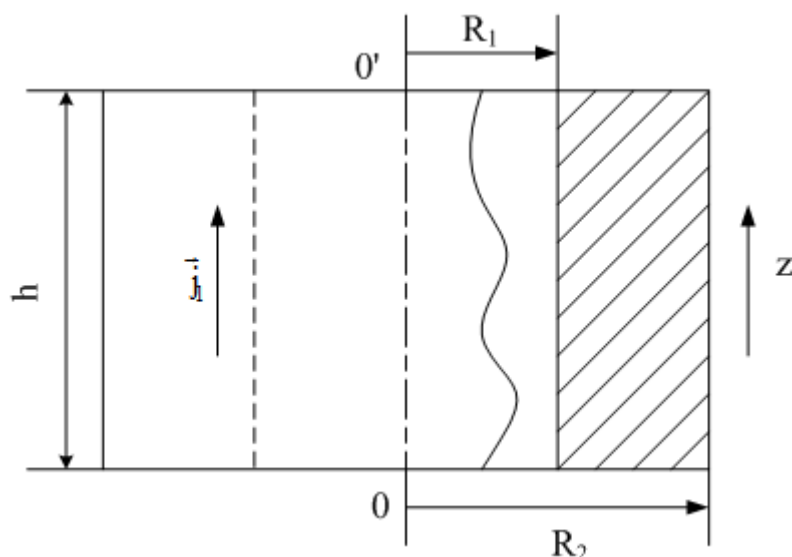


Рис. 1. Вид спереди полого проводящего цилиндра

Это будет зависеть в первую очередь от направления протекания плотности тока в цилиндре. Первое значение индуктивности можно получить, если направить плотность тока по оси цилиндра  $OO'$  (совпадает с осью  $z$  цилиндрической системы координат). В этом случае реализуется аксиальная плотность тока  $\vec{j}_1 = (0, 0, j_z)$ . Ток входит в площадь круга, ограниченную радиусами  $R_1$  и  $R_2$  и выходит из такой же площади.

Фундаментальное уравнение магнитостатики

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1)$$

позволяет по заданному распределению аксиальной плотности тока в правой части вычислить распределение магнитного поля  $\vec{B} = (0, B_\varphi, 0)$  в пространстве, просчитать магнитный поток  $\Phi$ , создаваемый этим полем, и из связи тока и потока определить статическую индуктивность. К её значению стремятся экспериментальные частотные характеристики любой СВЧ-индуктивности на низких частотах.

Как видно из (1), индуктивность такого протекания тока будет зависеть не только от направления вектора  $\vec{j}$  в пространстве, но ещё и от того, по какому закону распределена плотность тока в пространстве.

На рис. 2 представлен вид сверху того же проводящего цилиндра, но с азимутальным направлением плотности тока  $\vec{j}_2 = (0, j_\varphi, 0)$ . Для создания такого тока в цилиндре необходимо сделать разрез АВ, указанный на рис. 2, и подвести ток к плоскостям этого разреза. При таком вводе тока правая часть в (1) изменяется. Изменяется и направление возбуждаемого магнитного поля, а стало быть, и связанный с ним поток и само значение индуктивности.

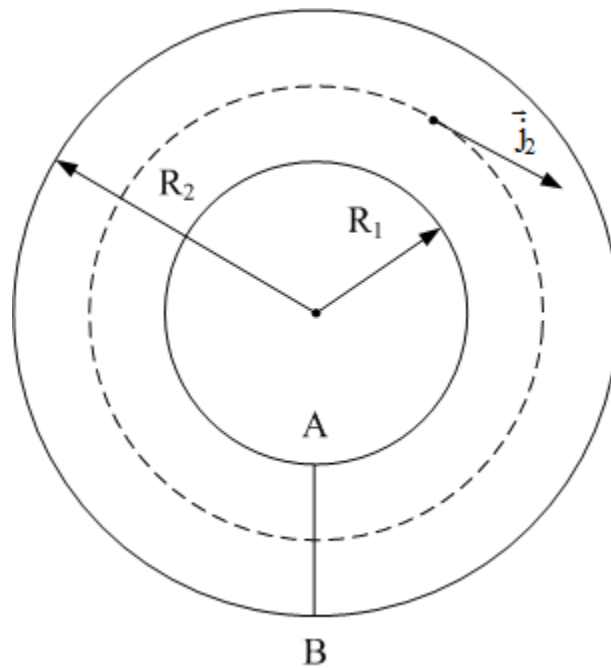


Рис. 2. Азимутальное направление плотности тока в цилиндре

На рис. 3 показан вид сверху проводящего цилиндра, в котором формируемая плотность тока имеет радиальное направление в пространстве  $\vec{j}_3 = (j_r, 0, 0)$ . Такой ток можно создать, подводя его к боковым поверхностям цилиндра. Это, в свою очередь, приведёт к формированию другого распределения магнитного поля, потока, а стало быть, и индуктивности.

Здесь сразу нужно оговориться, что полученные разные математические соотношения для 3-х индуктивностей уединённого цилиндра будут давать только правильный порядок величины индуктивности. Одна из причин этого в том, что при реализации технологии индуктивности в виде полого цилиндра любой подвод тока может быть осуществлён только в определённую точку или конечную область на поверхности цилиндра. То же самое наблюдается при подключении индуктивностей других геометрий.

Растекание тока из точечного источника или области и втекание в точечный или распределённый приёмник будет создавать дополнительные компоненты плотности тока, учесть которые в расчётах не представляется возможным. А они и могут изменять значение индуктивности в разы от расчётных значений. В этом смысле, предлагаемый метод позволяет рассчитывать либо уединённые индуктивности с высокой симметрией, либо такие же индуктивности, силовые линии магнитного поля которых нагружены на проводящий слой.



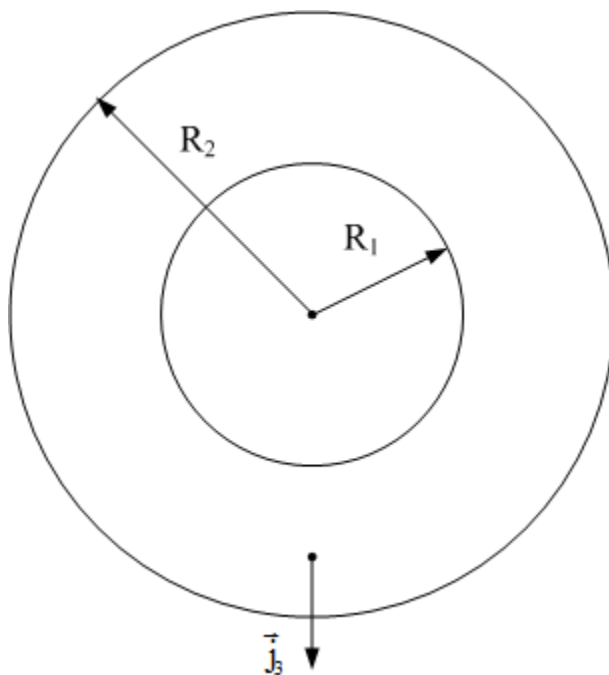


Рис. 3. Радиальное направление плотности тока в цилиндре

Но отмеченный недостаток метода можно превратить в достоинство, поскольку результат эксперимента теперь будет зависеть и от положения точечных или распределённых вводов тока. Это позволит легко подстраивать точное значение получившейся индуктивности изменением положения точечных или распределённых вводов тока.

Если в такой проводящий цилиндр вставить какие-либо материалы, обладающие магнитными или проводящими свойствами, то индуктивность такого цилиндра, магнитные силовые линии которого нагружены на внесённое вещество, будет принципиально изменять свои частотные свойства. Она теперь будет зависеть не только от свойств и направления плотности тока в индукторе, но и от того в каком месте и какой объём занимает внесённое вещество. Какими линейными и нелинейными характеристиками это вещество обладает по отношению к переменным электрическим и магнитным полям. В этом случае мы получаем индуктивность, названную нами вносимой.

Какую же нишу занимают предлагаемые нами методы расчётов и топологические принципы построения на этих методах класса интегральных индуктивностей с выявленными новыми свойствами? Прежде всего, методы не используют замену интегральной индуктивности секционными схемами с сосредоточенными параметрами.

Предлагаемые методы дополняют и развивают теорию магнитостатической и электродинамической интегральной индуктивности. По Матвееву А.Н. [11] индуктивность контура может иметь два определения. Первое определение позволяет связать поток магнитной

индукции  $\Phi$  сквозь фиксированную неподвижную площадь, который пропорционален силе тока  $i$

$$\Phi = L_1 i, \quad (2)$$

где  $L_1$  – постоянный положительный коэффициент пропорциональности, не зависящий от силы тока и индукции магнитного поля. Этот коэффициент называется индуктивностью контура. Соотношение (2) справедливо для постоянного тока и может сохранять свой вид и для переменного тока при условии, что фазовый сдвиг между током и потоком остаётся равным нулю.

В связи с этим индуктивность  $L_1$  следует назвать статической. Как показано в отчёте, она остаётся положительной только для индукторов с одним током. В системах с двумя независимыми токами в индукторе одной геометрии она начинает зависеть от отношения токов и позволяет предложить метод управления её значением в  $3D$  – системах.

На определении (2) мы построили первый метод расчёта магнитоэлектродинамической индуктивности. Он заключается в следующем:

1) по заданному геометрическому распределению плотности постоянного тока рассчитывается распределение магнитных полей, формируемых во внутреннем и внешнем, по отношению к проводнику, пространствах;

2) определяется величина магнитного потока, сцепленного с внутренней областью;

3) определяется величина магнитного потока, сцепленного с внешней областью;

4) вычисляются потоковая и токовая части индуктивности;

5) находится частотная зависимость добротности для индуктивности конкретной геометрии, из которой определяются масштабы характеристических частот;

6) полученные для различных геометрий растекания тока значения индуктивности сравниваются с экспериментом и делаются выводы о соответствии предложенной физико-математической модели известным экспериментам;

Второе определение справедливо для индуктивности, которая проявляет свои электродинамические свойства. Оно следует из определения энергии магнитного поля, которая создаётся силой тока  $i$ , текущим по контуру с индуктивностью  $L_2$

$$W = L_2 i^2 / 2. \quad (3)$$

В связи с этим определение (3) следует назвать энергетическим определением индуктивности. На определении (3) мы строим метод расчёта электродинамической вносимой индуктивности. Для такого класса индуктивностей был обращён принятый ранее порядок расчёта:

1. Задаём внешнее переменное магнитное поле  $\vec{B}$  высокой симметрии.

2. Направляем его в немагнитный проводящий цилиндр так, чтобы оси цилиндра и направления внешнего магнитного поля совпадали.

3. Записываем первое уравнение Максвелла, из которого по известной правой части определяем распределение вихревого электрического поля  $\vec{E}_{rot}$ .

4. Привлекая закон Ома в дифференциальной форме  $\vec{j} = \vec{E}_{rot} / \rho$ , находим пространственное распределение плотности вихревых токов.

5. Интегрируя распределение плотности тока через поперечную току площадь, получаем значение полного тока, возникающее в проводящем цилиндре.

6. Используя баланс энергий, поступающих в систему, для значений, усреднённых по периоду изменения поля, получаем вносимую индуктивность в том случае, если квадрат внешнего магнитного поля сократится в обеих частях равенства баланса энергий.

Как показано в отчёте, предложенный метод оказывается справедливым на переменном токе любой частоты для произвольного фазового сдвига между током и потоком, а также между вихревым электрическим и магнитным полем. В отчёте показано, что при анализе диамагнетизма токов Фуко, возникающего в проводящем веществе, внесённом в магнитное поле, энергетическая индуктивность в некотором диапазоне может быть и отрицательной.

С другой стороны вычисление средней за полупериод потоковой динамической индуктивности показывает, что она может быть частотно-независимой и как положительной, так и отрицательной. Это указывает на возможные проявления разнополярных физических свойств токов Фуко: как диамагнитных, так и парамагнитных. Проявление указанных свойств было блестяще подтверждено в экспериментальных исследованиях сверхтонких проводящих слоёв, проведённых в штате Огайо [4].

Мы предлагаем методы расчёта индуктивностей с высокой симметрией. Это индуктивности одномерные – 1D, индуктивности двумерные – 2D, индуктивности трёхмерные – 3D. Это индуктивности статические и индуктивности, зависящие от частоты, а также частотно-независимые индуктивности для ограниченного диапазона частот. Друг от друга их отличает геометрия самой индуктивности, геометрия растекания тока, распределение плотности тока по поперечному сечению и вносимое в индуктивность проводящее вещество.

Одним из достоинств развиваемых аналитических методов является то, что они позволяют ввести для индуктивностей различной размерности важнейшие сравнительные технологические параметры. Под 1D – индуктивностью далее будем понимать индуктивность, в которой один из

пространственных размеров значительно больше двух других. Для 1D – индуктивности можно ввести параметр линейной плотности (погонную индуктивность, Гн/м)

$$\tau_L = L/l. \quad (4)$$

Под 2D – индуктивностью далее будем понимать индуктивность, в которой два пространственных размера значительно больше третьего. Для 2D – индуктивности можно ввести параметр поверхностной плотности (Гн/м<sup>2</sup>)

$$\sigma_L = L/S. \quad (5)$$

Под 3D – индуктивностью далее будем понимать индуктивность, в которой все пространственные размеры оказываются величинами одного порядка. Для 3D – индуктивности можно ввести параметр объёмной плотности (Гн/м<sup>3</sup>)

$$\rho_L = L/V. \quad (6)$$

Три сравнительные характеристики позволяют выбрать для планарной технологии максимальное, либо минимальное значение перечисленных плотностей индуктивности, превысить или понизить которые не удастся никакими ухищрениями.

Удивительно, но в современных технологиях создания планарной индуктивности и в мощных системах САПР почему-то эти важнейшие параметры индуктивности даже не рассматриваются. Причина этого видится нам в том, что в конечном итоге проектировщики всегда видят интегральную индуктивность как комплексное, не имеющее размеров, сосредоточенное сопротивление, действительная и мнимая части которого позволяют рассчитывать только частотные зависимости сосредоточенной индуктивности и добротности.

Несколько слов о различных математических представлениях индуктивности классического соленоида, имеющего  $N$  витков. Когда он намотан в плотную в один слой проводом диаметром  $d$  и имеет радиус каркаса  $R$ , то его индуктивность обычно представляется в виде (см., например, в [11])

$$L = \mu_0 S N^2 / l = \mu_0 n^2 V, \quad (7)$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная, а  $n=N/l$  – число витков на единицу длины  $l=Nd$  соленоида,  $S$  – площадь поперечного сечения, а  $V$  – объём соленоида. Из (7) следуют очевидные физические утверждения:

- 1) индуктивность соленоида при постоянном числе витков на единицу длины пропорциональна квадрату числа его витков;
- 2) индуктивность такого соленоида можно увеличить только увеличением его объёма. Этому мы учили студентов на протяжении последних 70-и лет.

Эти утверждения оказываются несостоятельными, если ввести масштаб индуктивности  $L^*$  и (7) представить в виде

$$\frac{L}{L_*} = \frac{R}{d} N, \quad (8)$$

где  $L_* = \mu_0 \pi R$  – масштаб индуктивности классического соленоида. Из (8) можно получить иные физические следствия:

1) индуктивность соленоида при  $R/d = \text{const}$  линейная, а не квадратичная, по числу витков  $N$ ;

2) Для одного и того же количества витков  $N$  можно реализовать две различные индуктивности: первая будет больше, а вторая меньше (предполагается, что условие отношения между диаметрами применяемых проводников  $d_1 < d_2$  выполнено).

3) Из этих двух индуктивностей большая индуктивность обладает меньшим объёмом, поскольку их отношение  $V_1/V_2 = d_1/d_2 < 1$ . Как показано в отчёте, при том же токе первая индуктивность получается больше по причине увеличения продольной линейной плотности тока первой индуктивности по сравнению со второй.

Линейная зависимость индуктивности от числа витков, вытекающая из математического представления (8), была подтверждена в экспериментах, проводимых американскими технологами фирмы PARC с ленточными микросолоноидами [5]. Они имели одинаковое отношение  $R/d \approx 1$  и различное количество витков  $N$ .

Приведённый пример указывает на то, что при получении аналитических формул индуктивности высокой симметрии в них всегда нужно выделять масштаб, который определяет исходная геометрия. Иначе, можно сделать неправильные физические выводы. Масштаб позволяет определить границы диапазона изменения индуктивности в рассматриваемой физико-математической модели. Рассчитанные границы диапазона изменения индуктивности обычно всегда ограничены и не могут превышать значений, отличающихся на порядок вверх и вниз от масштаба индуктивности системы.

В первом разделе монографии собраны аннотации наиболее интересных на наш взгляд публикаций по современным методам расчёта интегральных индуктивностей, имеющих микроскопические размеры, и их практической реализации. Приведены достигнутые на современном этапе технологии геометрические размеры и значения величины микроскопической индуктивности для систем на кристалле и интегральных микросхем.

Во втором разделе монографии предложен аналитический метод расчёта статической планарной индуктивности для нулевого фазового сдвига, существующего между током и потоком. Исследованы магнитные и индуктивные свойства планарного токового 2D-кольца с азимутальной ориентацией в пространстве вектора плотности тока. Получены распределения магнитных полей внутри и вне кольца. Рассчитана

потоковая часть индуктивности токового кольца с конечной радиальной толщиной и её добротность. Проведено моделирование частотных свойств индуктивности токового кольца в симуляторе *HFSS – Ansoft*, сделаны сравнения с результатами: эксперимента, моделирования и аналитических вычислений.

Рассчитан коэффициент увеличения планарной индуктивности, который можно достигнуть применением 2D-спиралей Архимеда и обобщённых спиралей. Для этого построена физико-математическая модель расчёта магнитного поля и индуктивности спиралей. Сделаны расчёты для различного числа витков и различных начальных и конечных радиусов спиралей.

В разделе 3 монографии разработаны алгоритмы расчёта погонных 3-D индуктивностей цилиндрической симметрии с аксиальным направлением в пространстве плотности тока. Для этого исследованы магнитные и индуктивные свойства полого и круглого цилиндрических проводников с током. Получены распределения магнитных полей и их индуктивность. Введён параметр обрезания поля. Рассчитана добротность индуктивности цилиндрического проводника.

Исследованы индукционные и индуктивные свойства коаксиального кабеля. Получены радиальные распределения векторного потенциала и индукции магнитного поля внутри коаксиального кабеля. Предложен метод управления индуктивностью коаксиального кабеля для сонаправленных и встречных токов в центральной жиле и оплётке.

В разделе 4 монографии разработаны аналитические методы расчёта интегральных индуктивностей для микросхем и систем на кристалле. Для этого исследованы индукционные и индуктивные свойства трубчатого проводящего цилиндра с азимутальным направлением в пространстве вектора плотности вихревого тока. Из энергетического баланса в системе получена частотная зависимость вносимой интегральной индуктивности трубчатого проводящего цилиндра. Рассчитаны основные физические параметры цилиндров с малой радиальной толщиной и приведены значения величины вносимой индуктивности проводящего цилиндра конечной толщины.

Выполнен учёт влияния магнитных свойств токов Фуко и омических потерь на значение вносимой индуктивности сплошного немагнитного цилиндра. Выяснены его частотные свойства. Показано, что индуктивность такого цилиндра для низкого, и высокого по сравнению с масштабом частоты, частотного диапазона может быть положительная (проявляется парамагнетизм токов Фуко) и может быть отрицательная в среднечастотной области (проявляется диамагнетизм токов Фуко). Исследовано влияние на частотную зависимость индуктивности радиальной составляющей магнитного поля отклика вещества.

В разделе 5 монографии проведены теоретические исследования физических свойств индуктивности ленточных микро-соленоидов. Введены понятия эталонной индуктивности и индуктивностей с малым и большим потокосцеплением. Рассчитаны добротности и объёмные плотности индуктивности соленоида в микро- и нано-размерах. Предложен способ увеличения частоты среза ленточного микросоленоида.

В разделе 6 исследованы физические свойства планарной индуктивности типа «проводящая наноплёнка в токовом кольце» для перспективных микронных и нанотехнологий.

В заключение вынесены наиболее весомые результаты монографии.

# ГЛАВА 1

## АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ ПО РАСЧЁТАМ ИНДУКТИВНОСТЕЙ В МИКРОСКОПИЧЕСКИХ РАЗМЕРАХ И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В настоящее время в мире в среднем появляется более 1000 работ по индуктивности каждые пять лет. Их можно разделить на несколько направлений исследований. Одно из направлений – это патенты, взятые на индуктивность, либо статьи, в которых обычно исследуются частотные свойства разнообразных индуктивностей. Обычно это одиночные токовые индукторы, разработанные технологами для интегральных микросхем, либо для систем на кристалле. В обзоре представлены современные работы по расчету интегральной микроскопической индуктивности и их практической реализации.

В работе [12] анализируется электромагнитное поведение круговых индукторов на основе кремния путем использования пространственного отображения системы из концентрических колец. Точно решаются соответствующие полевые уравнения в рамках квази-одномерной аппроксимации. Решение представляется в виде эквивалентной модели с сосредоточенными параметрами, где учитываются высокочастотные потери подложки для нелокальных передаточных сопротивлений. Результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

В статье [13] исследуется оптимизация интегральных индукторов с высокой добротностью для многослойной металлизации КМОП-технологии. Так как частотные стандарты для средств связи и других типов интегральных микросхем растут в направлении гигагерцового диапазона, использование интегральных индукторов становится все более и более реальным. К сожалению, применение интегральных индукторов затрудняется отсутствием средств проектирования, а также полезных моделей, объясняющих, как свойства индуктора изменяются с расположением (компоновкой), и как индуктор взаимодействует со своим окружением (внешней средой, оборудованием). В работе обсуждаются эти результаты и также анализируются оптимальные расположения индуктора для технологического процесса неспециализированной многослойной металлизации субмикронного КМОП. В заключение приводится практическое воплощение схемы связи, работающей на частоте 600 мегагерц, которая может иметь некоторые преимущества благодаря применению хороших интегральных индукторов.

В работе [14] «Микроволновые индукторы и емкости в стандартной многослойной кремниевой технологии межкомпонентных соединений» описываются спиральные индукторы и металл-металл емкости для микроволновых приложений, которые интегрируются на кремниевую



подложку при помощи стандартной 0,8-микронной биполярной КМОП технологии. Оптимизация индукторов достигнута за счет подстройки вертикальных и поперечных размеров и параллельного подключения нескольких коммутационных металлических слоев вместе. Модели индукторов и емкостей с сосредоточенными элементами дают детальное понимание важности геометрических размеров и технологических параметров для характеристик устройства. Высокий коэффициент добротности около 10 является одним из лучших результатов по кремнию, особенно при использовании стандартной кремниевой технологии.

В статье [15] «Разработка плоских микроэлектронных индукторов» исследуются влияние отрицательной взаимной индуктивности на свойства интегральных индуктивностей прямоугольной геометрии.

Отрицательная взаимная индуктивность появляется в результате объединения двух проводников, имеющих векторы плотности тока противоположных направлений. Как параметр в электронных цепях, отрицательная взаимная индуктивность обычно так мала, что ее небольшим воздействием можно пренебречь. Однако в мире микроэлектроники ее игнорирование может привести к пренебрежению величинами индуктивности, являющимися на 30 процентов выше ее обычных величин. В статье выводятся уравнения индуктивности для плоских тонко- и толсто-пленочных катушек. Сравниваются уравнения, которые включают отрицательную взаимную индуктивность с теми, которые ее не включают. Это описывает компьютерная программа, разработанная для вычисления индуктивностей, как с квадратной, так и с прямоугольной геометрией. Рассматриваемыми величинами являются ширина дорожки, расстояние между дорожками и число витков. Графические результаты представляются для катушек с числом витков до 16 для диапазона индуктивностей от 3 наногенри до 10 микрогенри. Хотя детали производства не раскрываются, обсуждаются воздействия толщины пленки и частоты на параметр взаимной индуктивности.

В работе [16] изучаются планарные спиральные индукторы для сверхвысокочастотных применений, которые объединены в одно целое (интегрированы) на силиконовой подложке в технологии многокристального модуля. Промышленные индукторы демонстрируют значения коэффициента добротности до величины 23. По известной авторам информации, это наивысшие значения для индукторов на кремнии, достигнутые до сих пор. Предложено программное обеспечение, которое разработано для быстрого и точного конструирования планарных спиральных индукторов.

Технология производства многокристального модуля, выполненного по методу травления, чьи сверхвысокочастотные параметры описываются в статье [17], включает в себя устанавливаемую на кремниевой подложке полиамид-алюминиевую конструкцию с 4-х-уровневой металлизацией.

Была разработана и внедрена специально предназначенная для сверхвысокочастотных характеристик компоновка, которая включает в себя последовательность микро-полосковых линий, спиральных индукторов, микро-полосковых согласующих структур, кольцевых резонаторов, сверхвысокочастотных базовых структур. Аналоговые измерения этих структур были выполнены с использованием радиочастотных методов на частотах от 0.5 до 20 Гигагерц. Были получены модели эквивалентной цепи, которые дали хорошее соответствие с экспериментальными измерениями и диапазоном определяемых линий передач и компонентов спиральных индукторов. Пригодный режим работы аналоговой линии передачи был получен для длины линии передачи 10 мм и частоты до 10 Гигагерц, в то время, как индукторы были измерены с исходными индуктивностями, приближающимися к 10 наногенри со значениями полезной добротности  $Q$  в области от 1 до 3 Гигагерц. Были также разработаны правила компоновки элементов с учетом низкочастотных перекрестных помех.

В работе [18] с названием «Расчеты индуктивности для разработки и моделирования системы многокристального модуля» исследованы индукторы, которые необходимы для реализации высокочастотных подсистем, особенно таких, как многокристальные модули. Определение параметров и оптимизация модулей с большим количеством выводов у микросхем требует знания законов само- и взаимо-индукции для цепей с различным числом выводов на одну контактную площадку. Усовершенствование методов сборки требует точных моделей для связующих проводов и их взаимодействия. Даны расчеты, основанные на трехмерном аналитическом решении для взаимной индуктивности шнуров полного тока и слоев, где протекают параллельные токи, поперечные по направлению к исходному полному току. Конечные площади поперечных сечений для непараллельных слоев рассчитываются численно из аналитического решения для токовых шнуров. Наглядно демонстрируется влияние сильного скин-эффекта на значение величин индуктивности. Показывается практическое применение для плоских индукторов и соединительных проводов. В статье рассчитывается действие земляных слоев печатной платы (одиночной и двойной земляных шин), проходящих вблизи схемы, и результат используется для разводки сигнальных каналов внутри типовых узлов с большим количеством выводов у микросхем.

В статье [19] комбинированным методом интегрального уравнения с конечными элементами рассчитываются частотно-зависимые индуктивности и сопротивления пространственных структур, обычно встречающиеся в современных электронных межкомпонентных соединениях. Обсуждаются математическая формулировка и численный метод решения. Представляются результаты для микро-полосковых изгибов и межслойных переходов. Результаты хорошо согласуются с

экспериментом. Обсуждается влияние частотной зависимости индуктивности на распространение импульса.

В работе [20] с названием «Миниатюрные трехмерные индукторы в стандартных КМОП-технологиях» представляется структура миниатюрных трехмерных индукторов. Предлагаемые миниатюрные трехмерные индукторы изготовлены по стандартной цифровой 0,35- нано 1P4M КМОП-технологии. Согласно результатам измерения, частота авторезонанса полного диапазона измерений предлагаемого трехмерного индуктора на 34% выше, чем стандартного многослойного индуктора. Более того, трехмерный индуктор занимает только 16% площади обычного спирального планарного индуктора с той же величиной индуктивности и максимальным коэффициентом добротности  $Q_{\max}$ . А маломощный усилитель с частотой 2.4 гигагерца, использующий предлагаемый миниатюрный трехмерный индуктор, уже изготовлен. Благодаря малой площади индуктора, размеры и стоимость высокочастотной микросхемы, могут быть значительно снижены.

В статье [21] построена физическая модель плоского спирального кремниевого индуктора. Модель подтверждена измеренными и опубликованными данными индукторов, имеющих разные геометрические и технологические параметры. Эта модель масштабируется при помощи геометрии индуктора, позволяющей разработчикам предсказать и оптимизировать коэффициент добротности.

В работе [22] рассмотрен встроенный в ИС спиральный индуктор с узорчатыми заземленными экранами для высокочастотных ИС на основе кремния. Экспериментальные результаты показывают, что заземленный экран эффективно разделяет спиральный индуктор и обладающую потерями кремниевую подложку. Новая разработка улучшает коэффициент добротности на 25% и снижает взаимодействие между подложкой и индукторами на величину до 25 децибел по сравнению со схемой без заземляющих экранов.

В работе [23] с названием «Увеличение полосы пропускания в КМОП с оптимизированным, встроенным в кристалл индуктором» представлен метод для расширения полосы пропускания широкополосной цепи на частоте порядка гигагерц путем применения встроенных в кристалл спиральных индукторов в качестве элементов параллельной высокочастотной коррекции. Добавочное сопротивление встроенного в кристалл индуктора вводится как часть нагрузочного сопротивления для того, чтобы позволить встроенному в кристалл индуктору реализоваться с минимальной площадью и емкостью. Точные выражения для индуктивности используются в модели индуктора, представляющей схему с сосредоточенными параметрами, для того, чтобы разрешить пассивным и активным компонентам в цепи одновременно оптимизироваться.

Обсуждается быстрый и эффективный метод глобальной оптимизации, основанный на геометрическом программировании.

В работе [24] предложена методика компактного моделирования для спиральных индукторов в высокочастотных ИС на основе кремния. Новая методика моделирования создает эквивалентную цепь модели, состоящую из частотно-независимых элементов цепи. Процедура быстрого автоматизированного выявления внедряется для определения величин элементов цепи из результатов измерений проходного  $S$ -параметра. Методика является гибкой в предоставлении возможностей для точного моделирования основных классов спиральных индукторов на подложках с высоким и низким удельным сопротивлением и для больших спиралей, показывающих тенденции к изменению распределения физических параметров. Новая методика моделирования используется для основных классов спиралей с различными размерами и параметрами подложки. Выведенные модели показывают отличное согласие с результатами измерений, проведенными в частотном диапазоне от 0.1 до 10 гигагерц.

В работе [25] «Моделирование, разработка и получение характеристик для кремниевых высокочастотных ИС» представляются результаты всестороннего исследования параметров и оптимизации индукторов, изготовленных из металла высшего уровня в технологии производства субмикронной кремниевой сверхбольшой ИС. Компьютерная программа, выделяет физически обоснованную модель микрополосковых компонентов, подходящую для схемотехнического моделирования. Она использована для оценки влияния отклонений в металлизации, геометрии модели и параметрах подложки на эксплуатационные качества индуктора ИС. Трехмерное численное моделирование и экспериментальные измерения индукторов также были использованы для установления критерия точности модели. В этой работе показано, что низкий коэффициент добротности индуктора главным образом существует благодаря ограничениям, наложенным тонкой металлизацией межкомпонентных соединений, применимых в большинстве технологий производства очень больших ИС, и что компьютерная оптимизация расположения (компоновки) индуктора может быть использована для достижения 50%-ного улучшения коэффициента добротности по сравнению с коэффициентом добротности неоптимизированных схем.

В статье [26] представлены несколько новых простых и точных выражений для индуктивности постоянного тока в квадратных, гексагональных, октогональных и кольцевых спиральных индукторов. Авторы оценивают точность приводимых выражений, также как и нескольких ранее опубликованных выражений для индуктивности, двумя путями: сравнением с предсказаниями анализатора трехмерных полей и сравнением с собственными измерениями, а также ранее

опубликованными измерениями. Полученное простое выражение согласуется со значениями индуктивности, прогнозируемыми анализатором полей в районе 3%, почти на порядок величины лучше, чем ранее опубликованные выражения, которые имели типичную область ошибок 20%.

В работе [27] проведено моделирование потерь подложки спирального индуктора в кремниевых высокочастотных ИС. Спиральные индукторы, сконструированные по технологии производства кремниевых ИС, имеют ограниченные коэффициенты добротности вследствие серии активных потерь и потерь внутри полупроводниковой подложки. Новая модель для уменьшения обусловленных потерь подложки показывает, как эти потери могут быть минимизированы, обеспечивая повышение коэффициента добротности вплоть до 230% по сравнению с неминимизированной схемой.

Статья [28] показывает, что индукторы с высоким коэффициентом добротности для разработки схемы с сосредоточенными элементами в диапазоне от 1 до 10 Гигагерц и передаточные линии с низкими потерями для схем с распределенными элементами на частоте свыше 10 Гигагерц, могут стать доступными с использованием предложенных корректировок в промышленной кремниевой технологии.

В работе [29] разрабатывается широкополосная физическая и масштабируемая модель эквивалентной цепи 2-П типа для индуктора на кристалле. Используя частотно-независимые индуктивно-резистивно-емкостные элементы, она точно фиксирует параметры зависимости сопротивления и индуктивности от частоты индукции. Эта новая модель полностью совместима как с переменным током, так и с анализом переходных процессов. Проверка результатов измерений при кремниевой-германиевой технологии демонстрирует прогнозируемую точность исполнения и отличную стабильность для широкого диапазона конфигураций индукторов.

В работе [30] с названием «Моделирование встроенных в кристалл спиральных индукторов для кремниевых высокочастотных ИС» обсуждается высокочастотное проектирование схем.

В высокочастотном проектировании схем эксплуатационные качества (изготовление, производительность, КПД) часто ограничиваются качеством пассивных элементов, отвечающих требованиям конкретного технологического процесса. Именно спиральные индукторы могут быть основным «узким горлышком» для проектирования генераторов, управляемых напряжением (ГУН), малошумящих усилителей, преобразователей частоты и т.д. Разработчикам для правильной оптимизации схем, использующих спиральный индуктор, необходимо знать несколько параметров в частотной области, включая такие как коэффициент добротности, полную индуктивность и частоту

авторезонанса. Эту информацию сложно спрогнозировать для спиралей, построенных на кремниевой подложке с потерями, потому что присутствует сложный частотно-зависимый механизм потерь. Первая часть этого исследования посвящена масштабируемой прогнозируемой модели для получения частотной области поведения спиральных индукторов на кремниевой подложке с потерями. Метод основывается на методике эквивалентной цепи составляющего элемента (РЕЕС) и является гибким подходом к моделированию спиральных индукторов. Основная методика (РЕЕС) также усовершенствуется для рационального включения частотно-зависимых вихревых токов в подложке с потерями посредством использования нового метода комплексного отображения. Этот усовершенствованный (РЕЕС) подход охватывает все основные реальные эффекты воздействия, включающие в себя скин-эффект проводника, эффект близости нахождения также, как и скин-эффект подложки. Подход используется для октогональных (восьмиугольных) спиральных индукторов и приводятся сравнения с результатами измерений.

Для дополнения масштабируемой улучшенной (РЕЕС) модели представляется новая широкополосная компактная модель эквивалентной цепи, которая подходит для моделирований во временной области. Эта модель достигает точности в широкополосном диапазоне благодаря применению «трансформаторных замкнутых цепей» к потерям модели, вызванных магнитным полем. Также описывается методика быстрых извлечений, основанная на процедуре подбора по методу наименьших квадратов. Результаты представляются для компактной модели трансформаторного контура, полученной из измерений. Сочетание точной масштабируемой модели и широкополосной компактной модели эквивалентной цепи обеспечивает полную методологию моделирования для спиральных индукторов на кремнии с потерями.

В работе [31] проведён анализ и моделирование несимметричного и дифференциального спирального индуктора в высокочастотных ИС на основе кремния. В ней представляется новая всесторонняя широкополосная компактная моделирующая методика для несимметричных спиральных индукторов и дифференциальных спиральных индукторов. Новая методика моделирования создает модель эквивалентной цепи, состоящей из частотно-независимых элементов цепи для использования в схемном моделировании. Разрабатывается процедура быстрого автоматического выделения для определения значений элементов цепи из информации по измерению  $S$ - параметра в двухполюснике. Методология крайне гибкая в допуске для точного моделирования общепринятых классов индукторов на подложках с высоким и низким удельным сопротивлением, и для больших спиралей, демонстрирующих распределенные тенденции.

Новая методика моделирования применяется к общепринятым типам спиралей с различными размерами и параметрами подложки. Представленная компактная методика моделирования имеет основное преимущество, которое заключается в значительном снижении времени подбора модели по сравнению с современными имеющимися в распоряжении моделями, базирующимися на методах оптимизации. Для демонстрации точности в сравнении с предыдущими моделями для выборки образца используется определенное число наборов измерений. Представляется разработанная компьютерная программа, которая используется для выборки моделей цепи. Результаты представляются в случае серийной выборки индуктора компьютерной программой. Выбранные модели показывают отличное согласование с наборами данных измерений в частотном диапазоне от 0,1 до 10 Гигагерц.

В работе [32] представляется новая широкополосная модель для планарных спиральных индуктивностей на кремниевой подложке, состоящая из идеальных сосредоточенных элементов. Модель эквивалентной цепи фиксирует распределенное поведение спирали для электрически больших устройств, в частности устройств с низкой частотой авторезонанса. Процедура быстрой автоматической выборки для определения величин элементов цепи из данных S-параметра двухполюсника. Новая методика моделирования применяется для выборки распределенной модели из измеряемых S-параметров с большой, величиной в 1,5 наногенри, спирали. Выбранная модель демонстрирует отличное согласование с измерениями в частотном диапазоне от 0,1 до 10 Гигагерц.

В работе [33] с названием «Аналитическая модель планарных индукторов на кремниевой подложке с небольшой степенью легирования для аналогового проектирования на частотах до 3 гигагерц» представлена аналитическая модель планарных индукторов в воздушной среде или на подложке с небольшой степенью легирования. Параметры модели согласованы при помощи электромагнитного моделирования и его достоверность подтверждена результатами измерений. В этой статье также показано, как аналитическая модель может быть использована для достижения лучшего понимания технологии, компоновки и разработки увязок (согласований, компромиссных решений).

В статье [34] многоуровневые спиральные индукторы, использующие технологию сверхвысокой степени интеграции (VLSI) межкомпонентных соединений, презентуется структура многоуровневого спирального индуктора (MLS). Величины индуктивностей от 8,8 до 32 наногенри и максимальные значения коэффициента добротности от 6,8 и 3.0, соответственно, достигаются в 4-хуровневой металлизированной биполярной КМОП-технологии (BiCMOS) с использованием 4 витков на каждой из двух или четырех этажерочных спиральных катушек площадью

226×226 мкм<sup>2</sup>. Сравнение многоуровневых спиральных индукторов (MLS) с различными устройствами управления на одноуровневых спиралях (SLS) показывает, что многоуровневые спиральные индукторы (MLS) обеспечивают одинаковую индуктивность на сопротивлении постоянного тока, но максимальный коэффициент добротности обычно измеряется на более низкой частоте, и частота авторезонанса снижается благодаря высокой межпроводной емкости.

Работа [35] посвящена анализу эффектов шнурования тока (Current Crowding Effects) в многовитковых индукторах. Известно, что эффективное трассировочное сопротивление в многовитковом спиральном индукторе, работающем на высоких частотах, значительно увеличивает его величину в сравнении с величиной при постоянном токе благодаря эффекту сжатия (шнурования) тока. Это явление, с преобладанием повышения сопротивления благодаря скин-эффекту, трудно строго проанализировать и оно, в общем-то, требует электромагнитного моделирования для количественной оценки. Токовое шнурование исследуется в этой статье посредством приближенного аналитического моделирования, и выражения первого порядка получаются для прогнозируемого сопротивления также как и функция частоты. Результаты получаются путем сравнения с электромагнитными моделированиями и сравниваются с результатами измерений, взятых для спирального индуктора, реализованного на кремниевом-сапфировой технологии.

В статье [36] анализируется эффективное масштабируемое моделирование двойной  $\pi$ -эквивалентной цепи для встроенных спиральных индукторов на кристалле.

Эта статья представляет эффективный метод для создания масштабируемой модели двойной  $\pi$ -цепи для спиральных индукторов. Двойная эквивалентная  $\pi$ -цепь широко используется для построения индуктора из-за его высокой точности на широком частотном диапазоне. Однако, непосредственное выделение параметра для двойной  $\pi$ -модели и масштабируемой подстройки является сложным вследствие большого числа элементов цепи. Предлагаемый метод производит масштабируемую модель, использующую относительно простую модель с одиночным  $\pi$  и преобразует ее в модель с двойным  $\pi$  согласно физически обоснованному алгоритму преобразования. Для этого, были получены физические соотношения между эквивалентными цепями с одним  $\pi$  и с двумя  $\pi$  для спирального индуктора. Предлагаемый метод подтверждается созданием библиотеки масштабируемого индуктора, использующего 0,13 мкм КМОП-технологии.

Работа [37] представляет несколько простых и точных выражений для статических индуктивностей квадратных, гексагональных, восьмиугольных и кольцевых спиральных индукторов. Точность выражений, также как и нескольких ранее опубликованных выражений для



индуктивности, проверяется двумя способами: сравнением с прогнозами анализатора трехмерных полей и сравнением с собственными измерениями, а также ранее опубликованными измерениями. Полученные выражения согласуются со значениями индуктивностей анализатора полей обычно в области 3%, и на порядок величины лучше, чем ранее опубликованные измерения, которые имеют стандартную величину нижнего уровня ошибок в 20% (или более).

Сравнение с измеренными величинами дает аналогичные результаты: полученные выражения (и, конечно, результаты анализатора полей) согласуются в районе 5% в сравнении с ошибками около 20% для ранее опубликованных выражений. (Мы полагаем, что большинство дополнительных ошибок в момент сравнения с опубликованными измеренными величинами, возникают из-за многообразия экспериментальных условий, при которых индуктивность измерялась). Предлагаемые простые выражения достаточно точны для проектирования и оптимизации индукторов или цепей встраиваемых индукторов. Конечно, так как допустимые отклонения обычно порядка нескольких процентов, на практике нет необходимости в «более точных» выражениях.

В [38] приводятся некоторые результаты измерений для частотно-зависимой индуктивности в ИС на кремниевой подложке с потерями. Частотно-зависимые измерения рассеяния (S) параметров, использующие векторный сетевой анализатор (VNA) выполнены на межкомпонентных соединениях ИС на кремниевой подложке с потерями. Многоканальный метод калибровки использован для выполнения выведения линейных параметров, из которых извлекается индуктивность линии. Высокоточная комплексная аппроксимация частотно-зависимого сопротивления на единицу длины кремниевой подложки с потерями для межкомпонентных соединений ИС применена для сравнения с выполненными измерениями.

В [39] исследованы свойства магнитного индуктора на тонкой пленке и его применение на мегагерцах в статическом переключателе (переключатель постоянного тока) - статический преобразователь (конвертор постоянного тока).

Авторы предлагают новый структурированный индуктор на тонкой пленке, использующий только намагниченность вихря. Индуктор на тонкой пленке имеет структуру сэндвича, который состоит из двойной прямоугольной спиральной катушки между верхней и нижней кобальт-циркониево-ниобиевыми (CoZrNb) аморфными тонкими пленками. Напыленные кобальт-циркониево-ниобиевые аморфные тонкие магнитные пленки имеют соосную магнитную анизотропию, введенную путем отжига в статическом поле. Ось легкого намагничивания совпадает с осью прямоугольной спиральной катушки. Поэтому в этом устройстве доминирует только процесс (технология) формирования магнитного вихря. Стандартные параметры:  $3.5 \times 5.5$  мм в размере, индуктивность в 1

микрогенри постоянная до 10 мегагерц, и коэффициент добротности 10 на 10-ти мегагерцах. С использованием этого индуктора на тонкой пленке был разработан мегагерцовый переключающий прерыватель постоянного тока – конвертер постоянного тока, бескорпусные полупроводниковые устройства (мощный полевой транзистор с МОП-структурой (MOSFET) и барьерный диод Шоттки) и многослойный керамический конденсатор. Этот конвертер с объемом в 0,1 кубического сантиметра имеет выходную мощность более 1 ватта на частоте переключений 5 мегагерц и удельную мощность, превышающую 10 ватт на кубический сантиметр (10 W/cc) или 160 ватт на кубический дюйм.

В работе [40] предложена новая технология для встроенных в кристалл индукторов с высоким коэффициентом добротности. Современный технологический метод предлагает улучшение коэффициента добротности высокочастотных встроенных индукторов для беспроводных применений. Обеспечивается существенное понижение потерь подложки, вызванных емкостной связью. Это реализуется путем удаления нижних оксидных слоев катушек оптимизированным методом подтравливания. Такая специальная процедура травления используется для создания проводящего слоя в подструктуре индуктора с очень низким удельным сопротивлением. Набор твердотельных окисло-металлических плёнок, размещенных ниже металлических витков стабилизирует катушку и предотвращает появление полостей в структуре вследствие механического разрушения. Оксидная емкость значительно уменьшается путем снижения значений диэлектрической проницаемости от 4 до 1. Потери на емкостную связь в подложке понижаются в той же пропорции. Результирующий максимальный коэффициент добротности новых разработок вплоть до 100% выше по сравнению с аналогичными устройствами, включающих в себя оксидные слои, но значительно сдвинутых в сторону более высоких частот. Улучшения коэффициента добротности от 10 до 15 было получено на частоте 3 гигагерца при величине индуктора 2,2 наногенри с внешним диаметром 213 микрон. Частота авторезонанса и частота максимума коэффициента добротности сдвигаются в сторону более высоких частот, что вызвано сокращением полной емкости структуры. Это позволяет разработчикам схем использовать индукторы для применения в устройствах, работающих на более высоких частотах. Катушки с различными компоновками и значениями индуктивности были проверены и показали аналогичные результаты.

В работе [41] проводится обзор использования магнитных пленок для миниатюризации планарных индукторов, работающих на сверхвысоких частотах. Анализируются материалы и аспекты проектирования, определяющие эффективность микросхем. Обсуждаются магнитные потери и их роль в ограничении диапазона рабочих частот

устройства, а также коэффициент добротности. Рассматриваются геометрии стандартных индукторов. Многослойный магнитный полосковый (ленточный) индуктор служит доказательством поддержки перспективы применений на частоте в гигагерцы.

Статья [42] представляет собой высокоточную масштабируемую базовую физическую модель с сосредоточенными параметрами для планарного спирального индуктора, которая учитывает явления потерь, как в металле, так и в подложке. Модель была применена для индукторов (RGPS) с радиально узорчатым экраном заземления и легированных донорной примесью  $n^+$ . Модель была должным образом оптимизирована при помощи 3D наблюдений на электронном микроскопе. Затем было произведена проверка данных при помощи сравнения с экспериментальными измерениями на одной кремниевой пластине. Проверка была выполнена для широкого диапазона индукторов с различными геометрическими размерами. Полученные результаты сравнивались с двух портовым и 3D – моделированием. Продемонстрировано очень точное прогнозирование вычисленных и измеренных параметров индукторов на авторезонансной частоте.

### **1.1. Выводы по главе 1**

- В обзоре представлено более 30-и работ, посвящённых расчётам индуктивностей микроскопических размеров и их практической реализации.
- Основное количество работ предлагают методы оптимизации интегральных индукторов с высокой добротностью для многослойной металлизации в КМОП-технологиях.
- Базовой моделью индукторов является либо модель одиночного спирального индуктора, либо модель спирального индуктора на кремниевой подложке без экранов и с экранами разнообразной формы.
- Исследованы вопросы влияния отрицательной взаимной индуктивности на свойства интегральных индуктивностей прямоугольных геометрий.
- Обсуждается проблема создания спиральных индукторов на кремниевой подложке с высокой добротностью.
- Предлагается различные методики и обеспечивающие их виды программного обеспечения, позволяющие быстрое и точное конструирование планарных спиральных индукторов при производстве моно и много-кристальных модулей.
- Рассчитывается влияние на индуктор земляных слоёв печатной платы, проходящей вблизи него.

- Предложено большое количество различных моделей плоских спиральных кремниевых индукторов на кристалле. Обсуждаются их достоинства и недостатки.
- Обсуждаются вопросы построения в интегральной схеме спиральных индукторов с различными геометриями узорчатых заземлённых экранов для высокочастотных ИС.
- Получено несколько новых простых и точных выражений для индуктивности постоянного тока в квадратных, гексагональных, октогональных и кольцевых спиральных индукторов.
- Предложено построение многоуровневых спиральных индукторов в 4-х уровневой металлизированной биполярной КМОП-технологии с учётом максимальной добротности и пониженной частоте авторезонанса.
- Проанализированы эффекты шнурования тока в многовитковых индукторах. Предложено приближённое аналитическое моделирование, позволяющее получать частотные зависимости для спиральных индукторов, реализованных на кремниво-сапфировой технологии.
- Исследованы свойства низкочастотного (10 МГц) индуктора на магнитной тонкой плёнке из сплава кобальт-цирконий-ниобий. Изготовлен стандартный образец 3,5х5,5 мм в размере с индуктивностью 1 мкГн, имеющий добротность 10.
- Предложена технология встроенных в кристалл индукторов с высоким коэффициентом добротности для беспроводных применений.
- Предложена высокоточная масштабируемая базовая физическая модель с сосредоточенными параметрами для планарного спирального индуктора, которая учитывает явления потерь, как в металле, так и в подложке. Модель была применена для объяснения частотных свойств индуктивности RPGS-индукторов. Впервые показано, что частотные характеристики такой индуктивности переходят через нуль от положительных значений к отрицательным значениям. Продемонстрировано очень точное прогнозирование вычисленных и измеренных параметров индукторов на авторезонансной частоте, на которой индуктивность принимает самое большое положительное значение.

## ГЛАВА 2

### АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЁТА СТАТИЧЕСКОЙ ПЛАНАРНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ ДЛЯ НУЛЕВОГО ФАЗОВОГО СДВИГА МЕЖДУ ТОКОМ И ПОТОКОМ

Одним из мощных методов расчета магнитостатических полей по праву считается закон Био- Савара- Лапласа [11]. Он позволяет выяснить физические закономерности распределения магнитных полей, создаваемых простейшими токовыми системами. В современных математических обозначениях он записывается в виде:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\vec{dl} \times \vec{r})}{r^3}, \quad (2.1)$$

где  $\vec{dB}$  — элементарная магнитная индукция поля, создаваемая элементом проводника с током  $I\vec{dl}$ ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$  — магнитная постоянная;  $\vec{dl}$  — элементарный вектор, равный по модулю элементарной длине  $dl$  проводника и совпадающий по направлению с током (элемент проводника);  $I$  — сила тока;  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный от элемента проводника к точке наблюдения, в которой определяется магнитная индукция;  $(\vec{dl} \times \vec{r})$  — обозначение векторного произведения указанных векторов.

Взаимное расположение векторов формулы (2.1) в пространстве представлено на рис. 2.1.

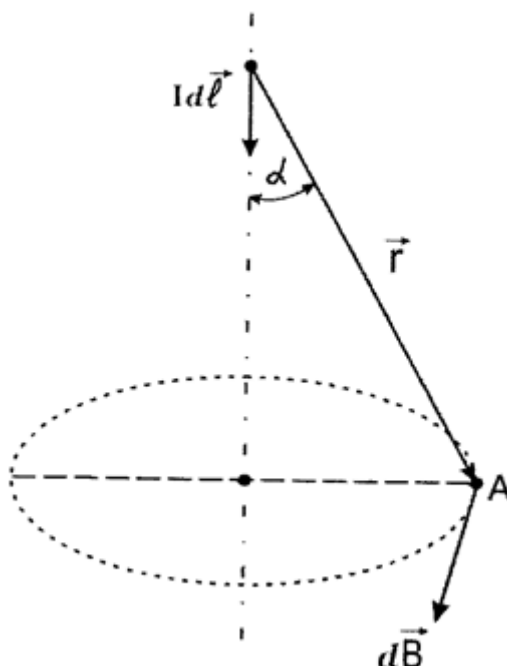


Рис. 2.1. Расположение векторов в формуле (2.1)

Здесь  $\alpha$  — угол между векторами  $Id\vec{l}$  и  $\vec{r}$ ; радиус-вектор  $\vec{r}$  совпадает с образующей конуса; вектор  $d\vec{B}$  начинается в точке наблюдения  $A$ , проводится по касательной к окружности, лежащей в основании конуса в плоскости, перпендикулярной направлению вектора  $Id\vec{l}$ . По свойству векторного произведения: вектор  $d\vec{B}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $Id\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

Используя принцип суперпозиции  $\vec{B} = \int d\vec{B}$ , с помощью (2.1) можно рассчитать распределения магнитных полей токов простейших конфигураций. Приведем примеры таких вычислений.

**Пример 1.** Магнитная индукция в центре кругового проводника с током [11]. Для вычисления сделаем чертеж, представленный на рис. 2.2.

Из рис. 2.2 видно, что модули векторов равны друг другу  $r_1 = r_2 = r$ , где  $r$  — радиус окружности. Причина этого в том, что все элементарные токи равноудалены от центра окружности, лежащего в точке  $A$ . Вектор  $Id\vec{l}$  в любой точке кольца направлен по касательной к окружности и в любой точке положения элемента тока составляет угол  $\alpha = \pi/2$  с радиус-вектором наблюдения. Векторы  $d\vec{B}_1, d\vec{B}_2$  в точке наблюдения  $A$  перпендикулярны плоскости листа и направлены к нам.

Элементарная дуга окружности связана с радиусом окружности и элементарным углом поворота соотношением  $dl = r \cdot d\varphi$ , ( $d\varphi$  в радианах). Магнитные поля, создаваемые в центре витка (точка  $A$ ) элементарными токами  $Id\vec{l}$ , находящимися на окружности, складываются по принципу суперпозиции, который запишем в виде:

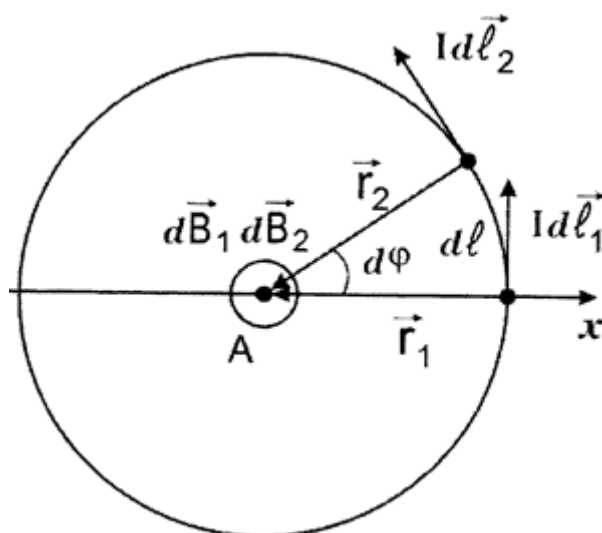


Рис. 2.2. Расположение основных векторов задачи

$$\vec{B} = \oint_l d\vec{B} = \oint_l \frac{\mu_0(\vec{dl} \times \vec{r})}{r^3};$$

$$B = \oint_l \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_0^{2\pi} r d\varphi = \frac{\mu_0 I 2\pi r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{2r} \quad (2.2)$$

Интегрирование в (2.2) производится по замкнутому контуру тока. При получении (2.2) раскрыто векторное произведение и учтено, что  $\sin \alpha = 1$ ;  $r = \text{const}$ ;  $\mu_0 = \text{const}$ ;  $I = \text{const}$  (постоянные можно вынести из-под знака интеграла).

Индукция в центре кольцевого тока зависит только от величины тока и расстояния до проводника, по которому протекает ток. При этом, для одного и того же тока поле в центре будет больше у кольца с меньшим радиусом.

Можно поставить резонный практический вопрос, а что в рассматриваемом случае полученный результат не зависит от геометрических параметров самого проводника (площади поперечного сечения, или диаметра проводника). Ответ простой: да, не зависит. В этом и заключается специфическая особенность закона Био- Савара- Лапласа. Проводник, о котором идет речь, геометрически бесконечно тонкий, но в тоже время, пропускающий конечный ток.

Эта математическая особенность закона связала между собой два понятия, которые противоречивы с практической точки зрения. Существование особенности привело к тому, что в магнитостатике проводник с током, создающий магнитное поле, удовлетворяющее закону (2.1), называют линейным. На наш взгляд, более точный термин, подходящий к указанному проводнику, — геометрический проводник. Геометрический проводник — это такой проводник с током, диаметром которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до точки наблюдения. Этот термин мы будем использовать далее по мере его применения.

Исходя из результата (2.2), можно сделать оценку для индуктивности одного витка в предположении однородности распределения магнитного поля внутри витка, т.е. поле в любой точке внутри витка равно значению индукции в центре  $B(r) = B = \text{const}$ . В этом приближении поток, создаваемый полем через площадь витка, равен

$$\Phi_0 = B \cdot S = \frac{\mu_0 I}{2r} \cdot \pi r^2 = \frac{\mu_0 \pi r}{2} \cdot I. \quad (2.3)$$

Коэффициент, связывающий ток в витке с потоком, создаваемым этим током, называется индуктивностью

$$L_0 = \frac{\mu_0 \pi r}{2} = \frac{\mu_0 l}{4}, \quad (2.4)$$

где  $L_0$  — оценочная индуктивность витка при однородном поле. Из (2.4) видно, что индуктивность витка, с точностью до постоянной величины,

оказывается совпадающей с длиной токового геометрического кольца. Она тем больше, чем больше радиус кольца.

**Оценки.** Предположим, что в интегральной микросхеме максимальное значение радиуса  $r$  витка с током не может превышать значение 0,5 см. Тогда для миллиамперных токов в центре такого кольца создается магнитная индукция  $B \approx 125,6$  нТл. При тех же условиях, но для радиуса витка  $r = 0,5$  мм поле в центре увеличивается на порядок.

Из (2.3) оценим значение магнитного потока для выбранных токовых колец. Для кольца  $r = 0,5$  см.

$$\Phi_{01} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{2} \cdot 10^{-3} = 10^{-11} \text{ Вб.}$$

Для кольца  $r = 0,5$  мм:  $\Phi_{02} = 10^{-12}$  Вб. Из (2.4) оценим величину индуктивности  $L_0$ .

$$L_0 = \frac{\mu_0 \pi r}{2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi r}{2} = 2 \cdot 10^{-6} r$$

Тогда для кольца  $r = 0,5$  см получим  $L_0 = 10$  нГн. Для кольца с радиусом  $r = 0,5$  мм оценочное значение индуктивности  $L_0 = 1$  нГн.

**Пример 2.** Магнитная индукция, создаваемая прямолинейным участком геометрического проводника конечной длины [11].

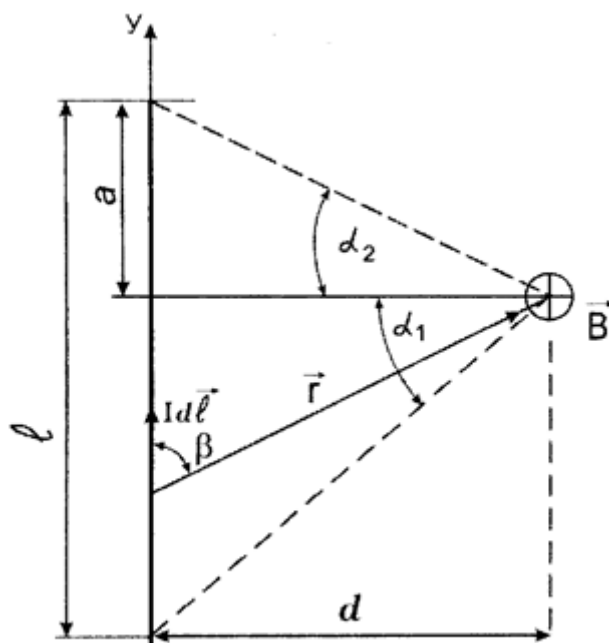


Рис. 2.3. Расположение основных векторов задачи

На рис. 2.3 представлены основные геометрические параметры задачи. Здесь  $l$  – длина прямолинейного участка тока;  $\beta$  – острый угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ ;  $d$  – длина перпендикуляра, проведенного из точки наблюдения к проводнику;  $\alpha_1$  – угол, под которым из точки наблюдения видна нижняя часть проводника;  $\alpha_2$  – угол, под которым из точки



наблюдения видна верхняя часть проводника;  $a$  – длина верхней части проводника; ось  $y$  связана с проводником и направлена вверх по току.

Суммарный вектор индукции магнитного поля, создаваемый всеми токовыми элементами проводника,  $\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости чертежа и рассчитывается по закону (2.1). Тогда  $|\vec{dl} \times \vec{r}| = dl \cdot r \cdot \sin(\vec{dl}, \vec{r}) = dl \cdot r \cdot \sin \beta = dl \cdot d = dy \cdot d_0$ . Выражая подынтегральную функцию через переменную  $y$ , получим

$$B = \frac{\mu_0 I d}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(d^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \left\{ \frac{a}{(a^2 + d^2)^{1/2}} + \frac{l-a}{((l-a)^2 + d^2)^{1/2}} \right\} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2). \quad (2.5)$$

При интегрировании в (2.5) принято: 1) начало координат  $y = 0$  находится в точке пересечения перпендикуляра и проводника; 2)  $y_1 = -(l-a)$ ;  $y_2 = a$ ; 3) использован табличный интеграл, приведённый в [12] для  $n \neq 1$ :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}; \quad (2.6)$$

С помощью (2.5) можно вычислить индукцию поля любого контура с током, состоящего из прямолинейных отрезков.

Когда точка наблюдения находится на больших расстояниях от проводника, т.е. выполнены условия  $d \gg a$  и  $d \gg l$ ,

$$\sin \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 \approx \frac{a}{d}; \quad \sin \alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 \approx \frac{l-a}{d};$$

формула (2.5) упрощается и имеет вид

$$B = \frac{\mu_0 I l}{4\pi d^2}.$$

На больших расстояниях от геометрического проводника с током конечной длины магнитное поле убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до проводника.

Если точку наблюдения приблизить к геометрическому проводнику  $d/l \rightarrow 0$ , то  $\sin \alpha_1 \rightarrow 1$ ;  $\sin \alpha_2 \rightarrow 2$ . В этом случае соотношение (2.5) переходит в формулу для магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямолинейным проводником с током

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}. \quad (2.7)$$

Магнитное поле бесконечно длинного прямого геометрического проводника с током имеет особенность  $\sim 1/d$ . Эта особенность обусловлена тем, что при  $d \rightarrow 0$  точка наблюдения все ближе подходит к месту расположения геометрического проводника. Неустраняемая особенность, существующая в математической модели, возникает из-за физико-математического противоречия, заложенного в законе Био-Савара-Лапласа.

**Пример 3.** Определить индукцию магнитного поля на оси геометрического кругового тока  $I$  радиусом  $r_0$  (рис. 2.4) (см. [11]).

Проинтегрируем закон (2.1):

$$\vec{B} = \oint_L d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (2.8)$$

где  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{h}$ ,  $d\vec{l} \times \vec{r} = d\vec{l} \times \vec{r}_0 + d\vec{l} \times \vec{h}$ . При интегрировании модуль  $\vec{r}$  не изменяется, поэтому

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \cdot \left( \oint_L d\vec{l} \times \vec{r}_0 + \oint_L d\vec{l} \times \vec{h} \right). \quad (2.9)$$

Поскольку  $\vec{h}$  – постоянный вектор, находим

$$\oint_L d\vec{l} \times \vec{h} = \left( \oint_L d\vec{l} \right) \times \vec{h} = 0,$$

так как  $\oint d\vec{l} = 0$ ; Другой интеграл, входящий в (2.9), вычисляется следующим образом:

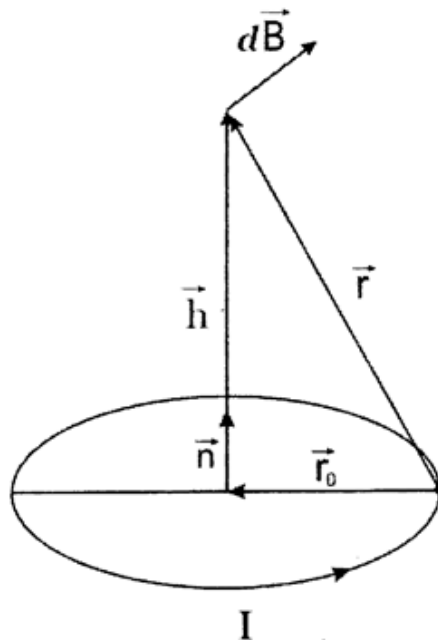


Рис.2.4. Расположение основных векторов задачи

$$\oint_L \vec{dl} \times \vec{r}_0 = \oint_L \vec{n} r_0 \cdot d\vec{l} = \vec{n} r_0 \oint_L d\vec{l} = \vec{n} r_0 \cdot 2\pi r_0,$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор, перпендикулярный плоскости, в которой протекает ток  $I$ .

Тогда

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + h^2)^{3/2}} \cdot \vec{n}. \quad (2.10)$$

Если ввести приведенную координату  $x = h/r_0$ , то соотношение (2.10) можно представить в виде

$$\frac{B}{B_0} = (1 + x^2)^{-3/2}, \quad (2.11)$$

где  $B_0 = \mu_0 I / 2r_0$  – индукция магнитного поля в центре витка. График зависимости (2.11) представлен на рис. 2.5. Из результатов расчета и аналитического представления видно, что функция имеет столообразную характеристику.

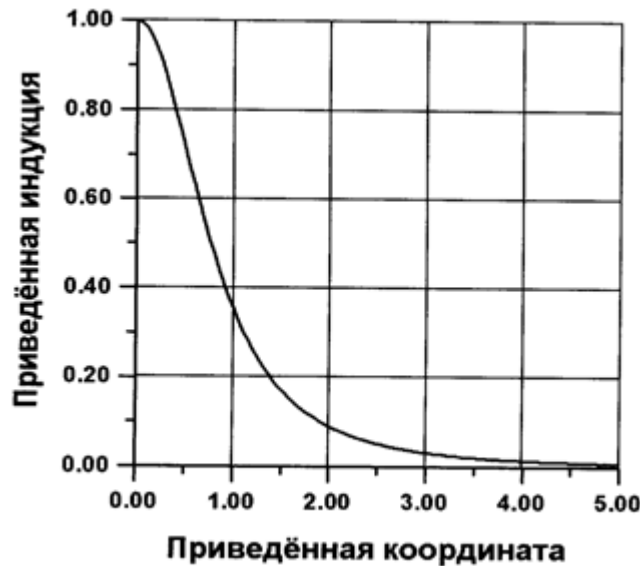


Рис.2.5. Зависимость приведенной индукции на оси кольцевого тока в зависимости от приведенной координаты

При  $x \ll 1$  её значения хорошо ложатся на зависимость (2.12)

$$\frac{B}{B_0} \approx 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{8}x^4 - \frac{35}{16}x^6 + 0(x^8). \quad (2.12)$$

На расстоянии  $h = 0,1r_0$  от витка поле изменяется незначительно, так как  $B \approx 0,985B_0$ . Точка перегиба функции приходится на значение  $x = h/r_0 = 1/2$ ; т.е.  $h = r_0/2$ . В этой точке поле кольца уменьшает значение индукции  $B/B_0$  до 0,716.

При  $h = r_0$  индукция магнитного поля снижается до значений  $B/B_0 = 0,35$ . При значении  $x = h/r_0 = 10$  оно уже практически полностью исчезает, поскольку  $B/B_0 = 0,02$ .

Знание закона изменения индукции магнитного поля на оси кольцевого геометрического тока позволяет надёжно оценить габариты самых разнообразных трансформаторов на кольцах Гельмгольца и исключить их осевое взаимное влияние на постоянном токе при размещении колец на одной оси.

Основные интегральные и дифференциальные законы магнитостатики позволяют рассчитать распределение магнитного поля, создаваемого прямым круглым проводником конечной толщины с током. Покажем тремя способами вычислений, что эти законы будут одинаковыми. Исследуем поля сплошного прямого круглого проводника конечной толщины с постоянной по сечению плотностью тока.

Введём цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  и её ось  $z$  совместим с осью прямого круглого проводника. Ориентация основных осей и векторов, указана на рис. 2.6. При этом  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-\infty < z < \infty$ .

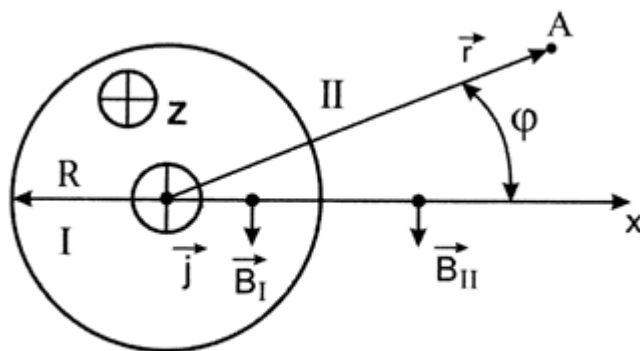


Рис. 2.6. Направление основных векторов в цилиндрической системе координат

На рис. 2.6 вектор плотности тока направлен по оси  $z$ . Будем считать, что вектор плотности тока имеет одну компоненту  $\vec{j} = (0, 0, j_z)$  и  $j_z = j_0 = \text{const}$  (постоянство плотности тока по поперечному сечению). Поверхность проводника, радиус которой  $R$ , разбивает всё пространство на две области: внутреннюю I (она ограничивает область протекания тока) и внешнюю, в которой тока нет. То есть:  $j_I = j_0 = \text{const}$ , а  $j_{II} = 0$ . Пользуясь правилом буравчика, определяем направление магнитного поля (указано на рис. 2.6.) в области I и в области II. Из чего видно, что вектор магнитной индукции при бесконечной длине проводника имеет только одну компоненту  $\vec{B} = \{0, B_\varphi, 0\}$ , величина которой зависит только от радиуса  $B_\varphi = B_\varphi(r)$ . На рис. 2.6 радиус-вектор  $\vec{r}$  соединяет ось проводника и точку наблюдения A.

Запишем интегральный закон полного тока

$$\oint_l \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N i, \quad (2.13)$$

где  $\mu_0$  - магнитная постоянная. Он гласит: циркуляция вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру  $l$  определяется с точностью до постоянной величины  $\mu_0$  алгебраической суммой токов, охватываемых контуром  $l$ .

Применим этот закон к рис. 2.6. Во внутренней области  $I$  проведем замкнутую окружность радиусом  $r < R$  длиной  $l$ , центр которой совмещен с осью проводника (см. рис. 2.7). Обход контура проводим по направлению силовых линий поля.

Во всех точках контура  $l$  векторы  $\vec{B}_I$  и  $d\vec{l}$  совпадают по направлению и  $\vec{B} d\vec{l} = B_\varphi \cdot dl$ . На фиксированном значении  $r$  величина  $B_\varphi = \text{const}$  и её можно вынести из под знака интеграла в (2.13)

$$B_\varphi \cdot \oint_l dl = \mu_0 \sum_{i=1}^N i; \quad (2.14)$$

Интегрируя левую часть (2.14), получим:

$$B_\varphi \cdot l = B_\varphi \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum_{i=1}^N i. \quad (2.15)$$

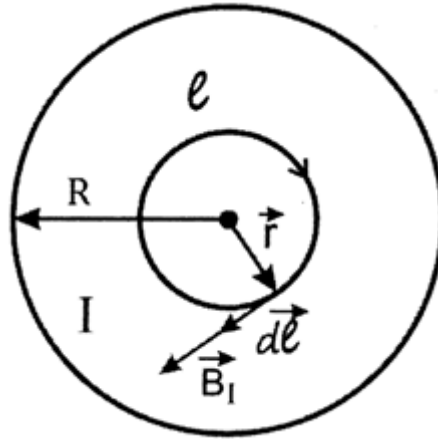


Рис. 2.7. Направления основных векторов задачи

В правой части (2.15) необходимо учесть только токи, охватываемые контуром  $l$ :

$$\sum_{i=1}^N i = j_0 \cdot S = j_0 \cdot \pi r^2 \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (2.15), получим зависимость  $B_\varphi(r)$  внутри проводника:

$$B_{\varphi} \cdot 2\pi r = \mu_0 j_0 \cdot \pi r^2;$$

Отсюда следует:

$$B_{\varphi}(I) = \frac{\mu_0 j_0 r}{2}. \quad (2.17)$$

Результат легко выразить через ток, текущий по проводнику

$$B_{\varphi}(I) = \frac{\mu_0 j_0 \cdot r \cdot \pi R^2}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \cdot r.$$

При постоянной плотности тока внутри проводника индукция магнитного поля является линейной функцией радиуса в области  $0 \leq r \leq R$ . На оси тока  $B_{\varphi} = 0$ , а на поверхности проводника  $B_{\varphi}(I) = \mu_0 j_0 R/2$ .

Ответим на вопрос: как изменяется индукция магнитного поля во внешней области II ( $r > R$ ). Для этого, во внешней области II проведем замкнутую окружность радиусом  $r > R$  длиной  $l$ , центр которой совмещен с осью проводника (см. рис. 2.8). Обход контура совершаем по направлению силовых линия поля.

Во всех точках контура  $l$  векторы  $\vec{B}_{II}$  и  $\vec{dl}$  совпадают по направлению и  $\vec{B}d\vec{l} = B_{\varphi} \cdot dl$ , как и ранее. В области  $r > R$  отсутствуют точки, порождающие магнитное поле. С учетом этого, (2.14) перепишем в виде:

$$B_{\varphi} \cdot l = B_{\varphi} \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot j_0 \cdot \pi R^2. \quad (2.18)$$

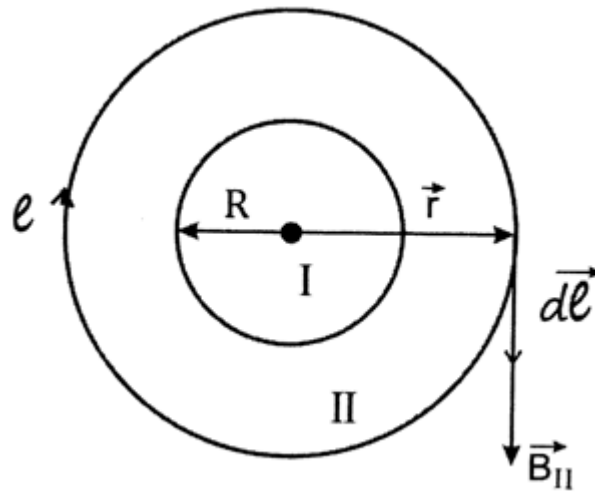


Рис. 2.8. Направления основных векторов задачи

В (2.18) учтены только токи, находящиеся в области I ( $0 \leq r \leq R$ ). Отсюда следует

$$B_{\varphi}(II) = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r}. \quad (2.19)$$

Результат легко выразить, через ток, текущий по проводнику

$$B_{\varphi}(II) = \frac{\mu_0 j_0 R^2 \cdot \pi}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}.$$

Для оценки скорости спадания поля полученное соотношение приведем к безразмерному виду

$$B_{\varphi}(II) = \frac{\mu_0 I \cdot R}{2\pi r \cdot R} = B_0 \cdot \frac{R}{r},$$

где  $B_0 = \mu_0 I / 2\pi R$  – масштаб индукции поля.

Отсюда видно, что индукция магнитного поля убывает на порядок на расстоянии  $R/r = 0,1$  или на десяти радиусах проводника.

При постоянной плотности тока вне проводника индукция магнитного поля убывает по закону  $\sim 1/r$ . На поверхности проводника при  $r = R$  поле достигает конечного значения  $B_{\varphi} = \mu_0 j_0 R/2$ , совпадающего со значением, даваемым решением внутренней задачи.

Приведем базовые дифференциальные законы магнитостатики [11]:

1. Первый закон утверждает, что статические магнитные поля бездивергентны:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.20)$$

Равенство (2.20) означает, что магнитные силовые линии вектора  $\vec{B}$  не имеют источников. То есть, в природе нет магнитных зарядов, которые создавали бы магнитное поле, как электрические заряды создают электрическое поле. Магнитное поле порождает ток, или поток движущихся зарядов. Линии вектора  $\vec{B}$  не имеют ни начала, ни конца. Они являются либо замкнутыми линиями, либо начинаются в бесконечности и уходят на бесконечность. Такие поля называют соленоидальными, либо вихревыми.

2. Вихревое магнитное поле, порождаемое постоянным током, описывается уравнением Максвелла, дополняющим уравнение (2.20)

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (2.21)$$

Решение уравнений (2.20) и (2.21) позволяет найти пространственное распределение всех трех компонент поля  $\vec{B} = \{B_x, B_y, B_z\}$  при заданном пространственном распределении всех трех компонент плотности тока  $\vec{j} = \{j_x, j_y, j_z\}$ .

Число неизвестных скалярных величин в этих уравнениях равно трем  $B_x, B_y, B_z$ , а общее число скалярных уравнений для их определения равно четырем. Таким образом, число уравнений больше, чем число неизвестных, однако это не делает систему переполненной.

**Тип решаемых магнитостатических задач.** С помощью уравнений (2.20) и (2.21) можно решать два класса задач.

➤ 1 класс задач. Зная пространственное распределение индукции статического магнитного поля найти законы распределения вектора плотности тока. Для этого нужно вычислить левую часть уравнения (2.21).

➤ 2 класс задач. Зная законы пространственного распределения вектора плотности тока  $\vec{j}$ , найти законы пространственного распределения индукции статического магнитного поля, порождаемого этими токами.

Этот класс задач сводится к решению трех скалярных уравнений в частных производных первого порядка, следующих из (2.21).

Часто из-за сложности решаемых задач для их упрощения целесообразно ввести дополнительную величину, которая называется векторным потенциалом [11]. Известное из векторного анализа тождество  $\text{div rot } \vec{A} = 0$  показывает, что уравнение (2.20) может быть представлено в виде

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (2.22)$$

где  $\vec{A}$  – векторный потенциал магнитного поля. Поле с заданной индукцией  $\vec{B}$  может быть описано не каким-то одним векторным потенциалом, а различными наборами векторных потенциалов.

В магнитостатике доказывается, что если потенциал  $\vec{A}$  описывает векторное поле с индукцией  $\vec{B}$ , то и другой потенциал, отличающийся от  $\vec{A}$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } x \quad (2.23)$$

произвольной функцией  $x(\vec{r})$  описывает тоже самое поле  $\vec{B}$ . Для доказательства вычислим индукцию поля  $\vec{B}'$ , описываемого потенциалом  $\vec{A}'$ :

$$\vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot}(\text{grad } x) = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}, \quad (2.24)$$

поскольку  $\text{rot}(\text{grad } x) = 0$ .

Неоднозначность векторного потенциала аналогична неоднозначности скалярного потенциала в теории электростатического поля, только там потенциал был определен с точностью до производной постоянной, а здесь – с точностью до производной от некоторой скалярной функции.

Это свойство векторного потенциала отпугнуло многих физиков теоретиков от решения магнитостатических задач, в которые входит векторный потенциал. На самом деле, как будет показано ниже, значение этой величины для магнитостатики трудно переоценить. Векторный потенциал позволяет легко понять симметрию исходных токовых распределений и построить доступные методы расчета для магнитостатических полей самой разнообразной конфигурации.

Пользуясь неоднозначностью в выборе векторного потенциала, можно наложить на него определенное условие, которое называют условием калибровки векторного потенциала. В магнитостатике чаще всего оно выбирается в виде

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (2.25)$$

Роль этого условия аналогична роли нормировки скалярного потенциала в электростатике. Следует понимать, что векторный потенциал в магнитостатике имеет лишь вспомогательное значение и не может быть измерен экспериментально, но, поскольку, от законов изменения



векторного потенциала легко перейти к законам распределения магнитной индукции, то этот недостаток не является существенным.

Получим уравнение для векторного потенциала. Подставим (2.22) в (2.21). Получим

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \mu_0\vec{j}. \quad (2.26)$$

Из векторного анализа известно, что

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \text{grad}(\text{div}\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}. \quad (2.27)$$

Поэтому (2.26) принимает вид

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}, \quad (2.28)$$

где принята во внимание калибровка (2.25). Распишем уравнение (2.28) в декартовых координатах. Их три

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x; \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y; \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z. \quad (2.29)$$

Из (2.29) видно, что каждая из компонент векторного потенциала подчиняется уравнению Пуассона, известному в электростатике, которое имеет вид:

$$\nabla^2 \varphi = \rho / \epsilon_0. \quad (2.30)$$

Как видно из (2.29) и (2.30), все уравнения представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных. Решения уравнения (2.30) хорошо исследованы при решении электростатических задач. Этим можно воспользоваться при решении простейших задач магнитостатики.

Рассчитаем распределение магнитного поля бесконечного круглого прямого тока с радиусом  $R$ , используя уравнение (2.9). Как показано на рис. 2.6, во внутренней и внешней областях поле  $\vec{B}$  имеет одну составляющую  $B_\varphi$ , а плотность тока  $j_z = j_0$  также имеет одну составляющую. Распишем уравнение (2.9) в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{B} &= \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z = \\ &= \mu_0 (j_r \cdot \vec{e}_r + j_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + j_z \cdot \vec{e}_z), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где введены обозначения  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  — единичные векторы цилиндрической системы координат. Для компонент  $B_\varphi$  и  $j_z$  (2.31) упрощается

$$(\text{rot}\vec{B})_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot B_\varphi) = \mu_0 j_z. \quad (2.32)$$

В уравнении (2.32) частные производные заменены на полные, поскольку  $B_\varphi = B_\varphi(r)$ . Легко проверить, что это поле бездивергентно

$$\text{div}\vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Это связано с тем, что единственная компонента  $B_\varphi$  не зависит от  $\varphi$ , то есть  $\partial B_\varphi / \partial \varphi = 0$ , а все остальные отсутствуют.

Запишем уравнение (2.32) для двух областей. В  $I$  области  $0 \leq r \leq R$  имеем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot B_\varphi) = \mu_0 j_0 = \text{const} = c_1. \quad (2.33)$$

В области  $II$  при  $r > R$  токи отсутствуют

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot B_\varphi) = 0. \quad (2.34)$$

Интегрируя (2.21), получим в области  $I$

$$B_\varphi = \mu_0 j_0 \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}. \quad (2.35)$$

Чтобы убрать особенность в нуле, выбираем произвольную постоянную  $c_1 = 0$ . Тогда получаем решение

$$B_\varphi(I) = \mu_0 j_0 \frac{r}{2} \text{ в области } 0 \leq r \leq R, \quad (2.36)$$

которое точно совпадает с решением (2.5).

Интегрируя (2.34), получим в области  $II$

$$B_\varphi = \frac{c_2}{r}, \quad (2.37)$$

где  $c_2$  - вторая произвольная постоянная. Выбираем значение  $c_2$ , из условия равенства индукций магнитного поля на поверхности  $r = R$

$$\mu_0 j_0 \frac{R}{2} = c_2 / R.$$

Тогда получим  $c_2 = \mu_0 j_0 \frac{R^2}{2}$ , отсюда следует изменение поля в области  $II$

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r}, \text{ при } r \geq R. \quad (2.38)$$

Выражение (2.38) точно совпадает с (2.7).

Рассчитаем ещё раз распределение магнитного поля бесконечного круглого прямого тока радиусом  $R$ , используя понятие векторного потенциала, и привлечем для этого уравнение (2.20). Запишем его в цилиндрических координатах с учетом того, что плотность тока  $j_z = j_0$  порождает поле векторного потенциала, которое имеет одну компоненту  $A_z$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z, \quad (2.39)$$

где  $\nabla^2 A_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dA_z}{dr} \right)$ , а индукция магнитного поля  $B_\varphi$  связана с  $A_z$  дифференциальным соотношением, которое следует из (2.10)

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (2.40)$$

Для внутренней области  $I$  ( $0 \leq r \leq R$ ) уравнение (2.27) имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dA_1}{dr} \right) = -\mu_0 j_0. \quad (2.41)$$

Далее везде индекс  $z$  в векторном потенциале заменяем индексом 1 или 2, нумерующим область, к которой относится решение задачи. Поэтому для внешней области  $r \geq R$  уравнение (2.39) запишется в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dA_2}{dr} \right) = 0. \quad (2.42)$$

Решение уравнения (2.41) выражается через произвольные постоянные  $c_1$  и  $c_2$

$$A_1 = -\frac{\mu_0 j_0 r^2}{4} + c_1 \ln r + c_2 \text{ при } 0 \leq r \leq R, \quad (2.43)$$

а решение (2.42) – через произвольные постоянные  $c_3$  и  $c_4$

$$A_2 = c_3 \cdot \ln r + c_4 \text{ при } r > R. \quad (2.44)$$

По полученным решениям рассчитаем распределение поля  $B_\varphi = B_\varphi(r)$ . Для поля  $B_1$  получаем

$$B_1 = \frac{\mu_0 j_0 r}{2} - \frac{c_1}{r} \text{ при } 0 \leq r \leq R. \quad (2.45)$$

Для поля  $B_2$  имеем распределение

$$B_2 = -\frac{c_3}{r} \text{ при } r \geq R. \quad (2.46)$$

Требуя конечность поля  $B_1$  при  $r = 0$ , из (2.45) заключаем, что  $c_1 = 0$ . Выбираем значение  $A_1$  в центре  $A_1(0) = 0$ . Это дает  $c_2 = 0$ . Поэтому, выражение для  $A_1$  и  $B_1$  принимают вид:

$$A_1 = -\frac{\mu_0 j_0 r^2}{4} \text{ при } 0 \leq r \leq R, \quad (2.47)$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 j_0 r}{2} \text{ при } 0 \leq r \leq R. \quad (2.48)$$

Для определения произвольной постоянной  $c_3$  воспользуемся условиями непрерывности для функции  $B_1$  и  $B_2$ :  $B_1(R) = B_2(R)$

$$\frac{\mu_0 j_0 R}{2} = -\frac{c_3}{R}. \quad (2.49)$$

Отсюда видно, что  $c_3 = -\frac{\mu_0 j_0 R^2}{2}$ . Для нахождения произвольной постоянной  $c_4$  запишем условие непрерывности для функции  $A_1$  и  $A_2$ :  $A_1(R) = A_2(R)$

$$-\frac{\mu_0 j_0 R^2}{4} = -\frac{\mu_0 j_0 R^2}{2} \cdot \ln R + c_4.$$

Отсюда  $c_4 = -\frac{\mu_0 j_0 R^2}{4} + \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2} \cdot \ln R$ .

Окончательные законы распределения векторного потенциала и индукции магнитного поля во внешней области  $r \geq R$  имеют вид

$$A_2 = -A_* \left[ \ln \left( \frac{r}{R} \right)^2 + 1 \right], \quad (2.50)$$

где  $A_* = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{4}$  – масштаб векторного потенциала,

$$B_2 = \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r}. \quad (2.51)$$

На рис. 2.9 представлено радиальное распределение векторного потенциала в координатах  $-A/A_* = f(r/R)$ , где  $-A/A_*$  – приведённое

значение векторного потенциала, взятое с противоположным знаком, а  $r/R$  – приведённая координата. Из рис. 2.9 видно, что векторный потенциал отрицателен во всей области пространства  $0 < r < \infty$ . Это указывает на то, что его направление всегда противоположно вектору плотности тока. На поверхности  $r/R=1$  потенциал однозначен и не имеет разрывов и скачков производной.

На рис. 2.10 представлено радиальное распределение индукции магнитного поля в координатах  $B/B_* = f(r/R)$ , где  $B_* = \mu_0 j_0 R/2$  – масштаб индукции магнитного поля,  $B/B_*$  – приведённое значение индукции,  $r/R$  – приведённое значение координаты. Из рис. 2.10 видно, что индукция магнитного поля круглого проводника положительна во всей области изменения  $r/R$ . Её наибольшее значение  $B = B_*$  достигается на поверхности проводника при  $r/R=1$ . На этой поверхности индукция магнитного поля испытывает скачок производной от положительного значения к отрицательному.



Рис. 2.9. Радиальное распределение приведённого значения векторного потенциала от приведённого радиуса

Из полученных соотношений (2.48) и (2.51) для индукции магнитного поля видно, что они точно совпадают с соотношениями (2.5) и (2.36); (2.7) и (2.38), полученными ранее.

**Оценки.** Приведём оценки масштабов величин  $A_*$  и  $B_*$  для типичных токов микроэлектроники. Рассчитаем три пары значений масштабов.

1. При протекании тока  $I=1$  мА по проводнику радиусом  $R=1$  мм получим  $A_* = 10^{-7} I = 10^{-10}$  Тл·м;  $B_* = 0,2$  мкТл.

2. При протекании тока  $I=1$  мкА по проводнику радиусом  $R=1$  нм получим  $A_* = 10^{-13}$  Тл·м;  $B_* = 200$  мкТл.

3. При протекании тока  $I=1$  мкА по проводнику радиусом  $R=5$  мкм получим  $A_* = 10^{-13}$  Тл·м;  $B_* = 40$  нТл.

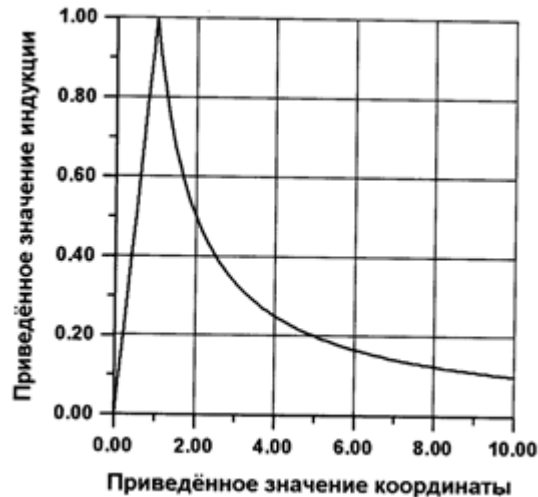


Рис. 2.10. Радиальное распределение индукции магнитного поля

Индукция магнитного поля бесконечно длинного прямого тока конечного радиуса  $R$  имеет скачок производной, но не имеет особенности на поверхности проводника при  $r = R$ .

Этим обстоятельством можно воспользоваться при вычислении радиального распределения поля методом Био-Савара-Лапласа, создаваемого геометрическим токовым кольцом.

## 2.1. Магнитные и индуктивные свойства планарного токового 2D-кольца с азимутальным направлением плотности тока

Рассчитаем радиальные распределения индукции магнитного поля внутри и вне плоского геометрического кольца с током.

### 2.1.1. Распределение магнитного поля внутри кольцевого тока

Расчет радиального распределения магнитного поля внутри кольца с током будем проводить, используя закон Био-Савара-Лапласа (2.1). На рис. 2.11 представлены основные векторные построения задачи. Элементарный вектор  $I\vec{dl}$  направлен по касательной к кольцевому току радиусом  $R$ .  $\vec{R}$  – радиус-вектор окружности.  $\vec{r}_B$  – радиус-вектор, соединяющий элементарный ток  $I\vec{dl}$  и точку наблюдателя  $A$ , в которой определяется значение элементарного вектора  $d\vec{B}_A$ .  $\vec{r}$  – радиус-вектор наблюдения соединяет центр окружности с точкой  $A$ .

Угол  $\alpha$  – угол между вектором  $I\vec{dl}$  и вектором  $\vec{r}_B$ . Угол  $\varphi$  – угол полярной системы координат, изменяющийся от 0 до  $2\pi$ , при интегрировании.

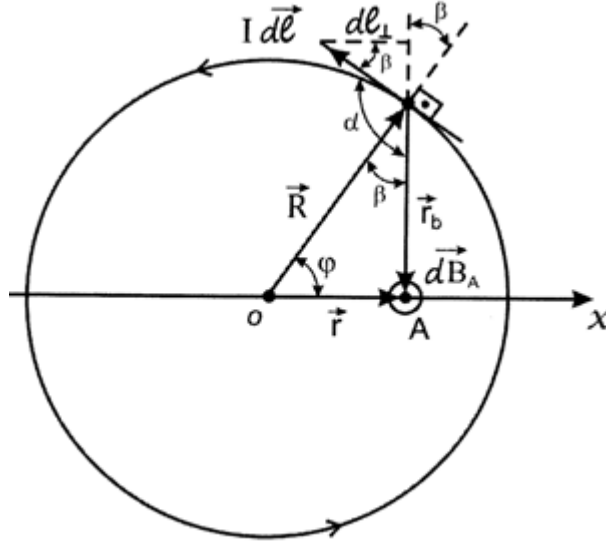


Рис.2.11. Расположение основных векторов задачи

Из чертежа видно, что проекция вектора  $\vec{dl}$ , которая перпендикулярна  $\vec{r}_B$ , находится из соотношения

$$dl_{\perp} = dl \cdot \cos \beta. \quad (2.52)$$

Элемент тока  $I\vec{dl}$  совпадает с направлением вектора плотности тока и создает в точке наблюдения A значение индукции магнитного поля  $d\vec{B}_A$ . Вектор  $d\vec{B}_A$  – направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежит кольцевой ток и смотрит на нас. Перепишем закон Био-Савара-Лапласа (2.1) для принятых обозначений

$$d\vec{B}_A = \frac{\mu_0 I (\vec{dl} \times \vec{r}_B)}{4\pi r_B^3}. \quad (2.53)$$

Для модуля вектора  $d\vec{B}_A$  получим

$$dB_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot r_B \cdot \sin \alpha}{r_B^3} = \frac{\mu_0 I dl \cdot \sin \alpha}{4\pi r_B^2}. \quad (2.54)$$

Из рис. 2.11 видно, что  $dl \cdot \sin \alpha = dl \cdot \sin(\pi/2 + \beta) = dl \cdot \cos \beta = dl_{\perp}$ . Для нахождения значения индукции  $\vec{B}_A$  в точке A необходимо все переменные в выражении (2.54) выразить через постоянные величины и переменный угол  $\varphi$ . Для этого запишем равенство:

$$dl = R \cdot d\varphi. \quad (2.55)$$

Из векторного треугольника на рис. 2.11 получим

$$\vec{r} - \vec{R} = \vec{r}_B, \quad (2.56)$$

при этом модуль вектора  $r$  – расстояние от центра окружности O до точки наблюдения A постоянная величина. Возведём (2.56) в квадрат

$$r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R} + R^2 = r_B^2. \quad (2.57)$$

Раскрывая в (2.57) скалярное произведение, получаем теорему косинусов

$$r^2 - 2r \cdot R \cdot \cos \varphi + R^2 = r_B^2. \quad (2.58)$$

Запишем теорему косинусов, в которую входит угол  $\beta$

$$r^2 = R^2 + r_B^2 - 2R \cdot r_B \cdot \cos \beta. \quad (2.59)$$

Подставим (2.58) в (2.59) и выразим  $\cos \beta$  через  $\cos \varphi$

$$\cos \beta = \frac{R - r \cos \varphi}{r_B}. \quad (2.60)$$

Подставим (2.60) в (2.54)

$$dB_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R \cdot d\varphi \cdot \cos \beta}{r_B^2} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \cdot \frac{(R - r \cos \varphi)}{r_B^3} d\varphi, \quad (2.61)$$

где  $r_B^3 = (r^2 - 2r R \cos \varphi + R^2)^{3/2}$ .

Применяя принцип суперпозиции, придем к интегрированию

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(1 - t \cos \varphi) d\varphi}{(t^2 - 2t \cos \varphi + 1)^{3/2}}, \quad (2.62)$$

где через  $t = r/R$  – обозначен зафиксированный приведенный радиус точки наблюдения  $A$ . Выражение (2.62) позволяет рассчитать индукцию магнитного поля, создаваемую отрезком кольца, расположенном на дуге радиусом  $R$ , начинающейся под углом  $\varphi_1$  и заканчивающейся под углом  $\varphi_2$ .

Интегрирование (2.62) не удастся провести в элементарных функциях. Его можно свести к комбинации полных эллиптических интегралов первого и второго родов при изменении угла  $\varphi$  в пределах:  $\varphi_1 = 0$ ;  $\varphi_2 = 2\pi$ . Для получения конечного результата разделим обе части (2.62) на индукцию магнитного поля в центре кольца радиусом  $R$  (см. 2.2).

$$\frac{2\pi \cdot B_A}{B_{\text{ц}}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(t^2 - 2t \cos \varphi + 1)^{3/2}} - t \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(t^2 - 2t \cos \varphi + 1)^{3/2}}. \quad (2.63)$$

Введем обозначения  $2t = b$ ;  $1 + t^2 = a$ . Тогда (2.63) перепишется в виде:

$$\frac{2\pi \cdot B_A}{B_{\text{ц}}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^{3/2}} - t \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^{3/2}}. \quad (2.64)$$

Будем интересоваться значением индукции магнитного поля, создаваемого всем кольцом в точке  $A$ . В силу четности подынтегральных функций имеем

$$\frac{2\pi \cdot B_A}{B_{\text{ц}}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^{3/2}} - 2t \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a - b \cos \varphi)^{3/2}}. \quad (2.65)$$

Первый интеграл в (2.65) сводится к табличному [12]:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a-b\cos x)^3}} = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}} E(\Psi, k) \Big|_0^x \quad (2.66)$$

при  $a > b > 0$  и  $0 \leq x \leq \pi$ . Второй интеграл также сводится к табличному после его разбиения на два интеграла

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{-2t \cos \varphi \, d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{3/2}} = \int_0^\pi \frac{(a-b\cos \varphi - a)d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{3/2}} = \int_0^\pi \frac{(a-b\cos \varphi)d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{3/2}} -$$

$$-a \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{3/2}} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{1/2}} - a \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(a-b\cos \varphi)^{3/2}}. \quad (2.67)$$

Первый интеграл в последнем равенстве (2.67) также табличный [12]:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a-b\cos x)}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}} F(\Psi, k) \Big|_0^x \quad (2.68)$$

при тех же ограничениях на переменные  $a$ ,  $b$  и  $x$ . В (2.66) и (2.67) введены обозначения:

$$k = \sqrt{\frac{2b}{a+b}} \quad (2.69)$$

– модуль эллиптического интеграла первого  $F(\Psi, k)$  и второго  $E(\Psi, k)$  родов;

$$\Psi = \arcsin \sqrt{\frac{(a+b)(1-\cos x)}{2(a-b\cos x)}} \quad (2.70)$$

– верхний предел интегрирования, который при  $x = \pi$  превращается в значение  $\Psi = \pi/2$ . Для этого предела интегрирования неполные эллиптические интегралы переходят в полные эллиптические интегралы  $K(k) = F(\pi/2, k)$  – первого рода и  $E(k) = E(\pi/2, k)$  – второго рода, интегральное представление которых имеет вид:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\Psi}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 \Psi}}, \quad (2.71)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 \Psi} \cdot d\Psi. \quad (2.72)$$

С учетом всех обозначений конечный результат (2.64) преобразуется к виду

$$\frac{B_A}{B_{\text{ц}}} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{E(k)}{1-r/R} + \frac{K(k)}{1+r/R} \right], \quad (2.73)$$



где  $k = 2 \cdot \sqrt{r/R} / (1 + r/R)$ . При  $r/R \rightarrow 0$  точка наблюдения  $A$  попадает в центр окружности. При этом значение  $k \rightarrow 0$ , а выражение (2.73) дает правильный результат, поскольку  $B_A/B_{\text{ц}} \rightarrow 1$ , так как  $E(k \rightarrow 0) \rightarrow \pi/2$ ;  $K(k \rightarrow 0) \rightarrow \pi/2$  (см. [13]). При увеличении  $r/R$  поле в перемещаемой точке наблюдения  $A$  растет и при  $r/R \rightarrow 1$  имеет особенность. Раскроем вид особенности при  $r/R \rightarrow 1$ . Для этого введем параметр

$$\delta = R - r. \quad (2.74)$$

Точка наблюдения  $A$  находится на расстоянии  $\delta$  от геометрического проводника. При  $r \rightarrow R$  параметр  $\delta$  становится очень малой величиной. Определим, как изменяется модуль эллиптического интеграла в этом приближении

$$k = \frac{2\sqrt{1 - \delta/R}}{2 - \delta/R} \approx (1 - \delta/2R)(1 + \delta/2R) = 1 - \frac{\delta^2}{4R^2}. \quad (2.75)$$

Из (2.75) видно, что при  $\delta/R \rightarrow 0$  модуль  $k$  мало отличается от значения 1.

Подставляя малое значение  $\delta/R \ll 1$  в (2.73), видим, что выражение имеет особенность вида  $\infty - \infty$ . Раскрывая её по правилу Лопиталя, получим, что в этой точке возникает особенность вида  $1/\delta$

$$\frac{B_A}{B_{\text{ц}}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{R}{\delta}. \quad (2.76)$$

При раскрытии особенности учтено, что  $E(1) = 1$  (см. [13]). Подставляя в (2.76) значение индукции в центре, получим

$$B_A(\delta \rightarrow 0) = \frac{\mu_0 I}{2 \pi \delta}. \quad (2.77)$$

Как видно из полученных результатов, радиальное распределение индукции магнитного поля геометрического токового кольца таково, что оно увеличивается внутри кольца при удалении точки наблюдения  $A$  от центра окружности к внутреннему краю кольца.

Магнитное поле имеет особенность вида  $1/\delta$ , которая повторяет особенность длинного прямого геометрического проводника с током. Эта особенность обусловлена тем, что при  $\delta \rightarrow 0$  точка наблюдения все ближе подходит к месту расположения геометрического проводника.

На рис. 2.12 в координатах  $B_A/B_{\text{ц}} = f(r/R)$ , где  $B_A/B_{\text{ц}}$  – приведенное значение индукции, а  $r/R$  – приведённый радиус точки наблюдения, представлено радиально распределение индукции магнитного поля кольца, даваемое формулой (2.73).

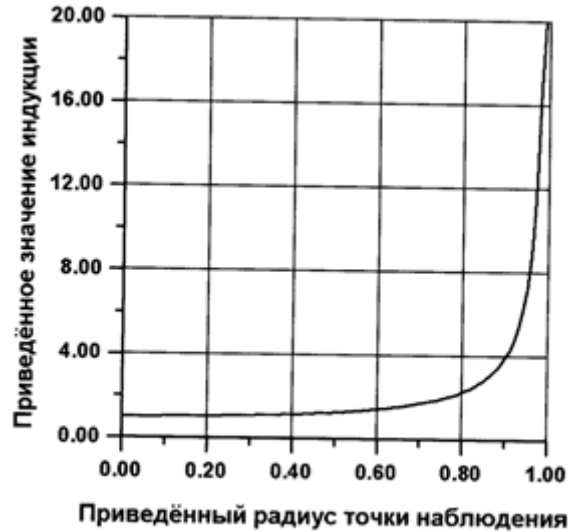


Рис. 2.12. Радиальное распределение магнитной индукции внутри кольца

Проведенное численное моделирование формулы (2.73) указывает на то, что при малых значениях  $r/R \ll 1$  индукция магнитного поля мало отличается от индукции в центре витка. Это позволяет разложить решение (2.73) в ряд по малому параметру  $x = r/R$ . Разложение имеет вид:

$$\frac{B_A(x)}{B_{\text{ц}}} \approx 1 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{15}{2}x^4 + 49x^5 - 175x^6 + 0(x^7). \quad (2.78)$$

Даже при  $x = 0,1$  первые два члена ряда дают значение  $B_A(x)/B_{\text{ц}} \approx 1.0075$  практически не отличающееся от машинного вычисления, приведенного в таблице 2.1.

В таблице 2.1 представлены результаты вычислений, выполненных с удвоенной точностью по формуле (2.73)

Таблица 2.1

Результаты численного моделирования радиального распределения магнитной индукции внутри кольца

$r/R$	$B_A/B_{\text{ц}}$
.00000000	1.00000000
.01000000	1.00007501
.02000000	1.00030011
.03000000	1.00067557
.04000000	1.00120180
.05000000	1.00187941
.06000000	1.00270914
.07000000	1.00369196
.08000000	1.00482898
.09000000	1.00612150
.10000000	1.00757100
.11000000	1.00917917

.12000000	1.01094787
.13000000	1.01287917
.14000000	1.01497536
.15000000	1.01723892
.16000000	1.01967257
.17000000	1.02227924
.18000000	1.02506213
.19000000	1.02802467
.20000000	1.03117054
.21000000	1.03450374
.22000000	1.03802850
.23000000	1.04174939
.24000000	1.04567129
.25000000	1.04979942
.26000000	1.05413935
.27000000	1.05869702
.28000000	1.06347878
.29000000	1.06849141
.30000000	1.07374212
.31000000	1.07923863
.32000000	1.08498914
.33000000	1.09100243
.34000000	1.09728784
.35000000	1.10385535
.36000000	1.11071563
.37000000	1.11788004
.38000000	1.12536077
.39000000	1.13317080
.40000000	1.14132406
.41000000	1.14983543
.42000000	1.15872090
.43000000	1.16799757
.44000000	1.17768382
.45000000	1.18779940
.46000000	1.19836554
.47000000	1.20940509
.48000000	1.22094270
.49000000	1.23300496
.50000000	1.24562061
.51000000	1.25882074
.52000000	1.27263905
.53000000	1.28711209
.54000000	1.30227961
.55000000	1.31818489
.56000000	1.33487511
.57000000	1.35240184
.58000000	1.37082152
.59000000	1.39019610

.60000000	1.41059364
.61000000	1.43208916
.62000000	1.45476551
.63000000	1.47871442
.64000000	1.50403773
.65000000	1.53084882
.66000000	1.55927428
.67000000	1.58945591
.68000000	1.62155307
.69000000	1.65574549
.70000000	1.69223663
.71000000	1.73125777
.72000000	1.77307290
.73000000	1.81798475
.74000000	1.86634222
.75000000	1.91854952
.76000000	1.97507760
.77000000	2.03647862
.78000000	2.10340427
.79000000	2.17662932
.80000000	2.25708225
.81000000	2.34588544
.82000000	2.44440877
.83000000	2.55434208
.84000000	2.67779465
.85000000	2.81743436
.86000000	2.97668637
.87000000	2.16002312
.88000000	2.37339901
.89000000	2.62492148
.90000000	2.92592374
.91000000	4.29275092
.92000000	4.74988276
.93000000	5.33572729
.94000000	6.11419657
.95000000	7.20014774
.96000000	8.82292044
.97000000	11.51674758
.98000000	16.88155294
.99000000	32.90191133

Результат (2.73) можно преобразовать к более простому виду

$$\frac{B_A(r/R)}{B_{\text{ц}}} = \frac{2}{\pi} \frac{E(k)}{(1 - k^2)}, \text{ (при } r < R) \quad (2.79)$$

где  $E(k)$  – полный эллиптический интеграл второго рода с модулем  $k = r/R$ . Разложение (2.79) по малому параметру  $x = r/R \ll 1$  приводит к ряду с четными степенями

$$\frac{B_A(x)}{B_{\text{ц}}} \approx 1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{45}{64}x^4 + \frac{175}{256}x^6 + 0(x^8). \quad (2.80)$$

Он также быстро сходится и может быть применен для значений  $x \leq 0,1$ . При  $r/R \rightarrow 1$  (2.79) имеет ту же особенность, что и (2.73).

### 2.1.2 Распределение магнитного поля вне кольцевого тока

Расчет радиального распределения магнитного поля вне кольца будем проводить, используя Закон Био-Савара-Лапласа (2.1) На рис. 2.13 представлены основные геометрические построения задачи. Точка  $A$ , в которой определяем индукцию магнитного поля  $d\vec{B}_A$ , находится вне кольца на расстоянии  $OA$ , отсчитываемом от центра кольца. При этом  $OC = R$ , а  $AC = h$  – кратчайшее расстояние от точки  $A$  к геометрическому проводнику.

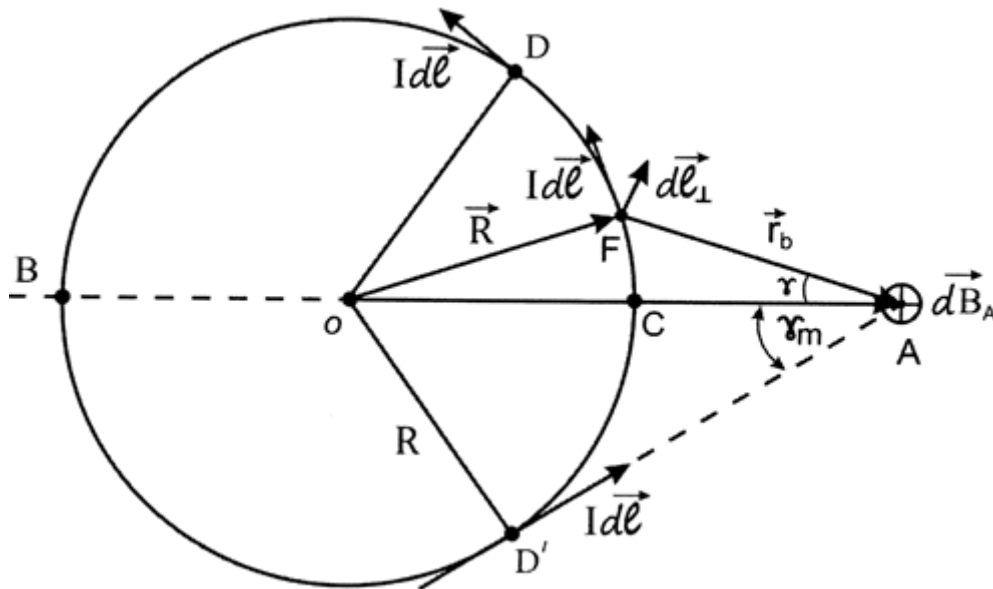


Рис. 2.13. Расположение основных векторов задачи

Ось  $OA$  делит кольцо пополам.  $\vec{R}$  – радиус-вектор окружности.  $\vec{r}_B$  – радиус-вектор, соединяющий текущее положение (точка  $F$ ) элементарного тока  $I d\vec{l}$  и точку наблюдения  $A$ , в которой определяется значение элементарного вектора  $d\vec{B}_A$ . Направление  $d\vec{B}_A$  перпендикулярно плоскости витка и смотрит от нас.

Угол  $\gamma$  – текущий угол элементарного тока  $I d\vec{l}$  представляет собой угол между осью симметрии  $OA$  и вектором  $\vec{r}_B$ . Угол при интегрировании изменяется в пределах от  $-\gamma_m$  до  $\gamma_m$ . Эти углы определяются следующим образом: из точки  $A$  к кольцевому току проводятся две касательные,

направления которых совпадают (либо противоположны) элементарному току  $I d\vec{l}$  (точки  $D$  и  $D'$ ). Тогда угол  $\gamma_m$  определяется соотношением

$$\sin \gamma_m = \frac{R}{R+h} = \frac{R}{OA}. \quad (2.81)$$

Перепишем закон (2.1) для обозначений, принятых на рис. 2.13

$$d\vec{B}_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\vec{dl} \times \vec{r}_B)}{r_B^3}. \quad (2.82)$$

Для модуля вектора  $dB_A$  получим

$$dB_A = \frac{\mu_0 I dl \cdot \sin \alpha}{4\pi r_B^2}. \quad (2.83)$$

На рис. 2.13 угол  $\alpha$  не указан. Но, поскольку

$$dl_{\perp} = dl \cdot \sin \alpha = r_B \cdot d\gamma, \quad (2.84)$$

то в (2.83) нужно перейти к переменной  $\gamma$ . Получим

$$dB_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\gamma}{r_B(\gamma)}. \quad (2.85)$$

Из треугольника  $OFA$  по теореме косинусов следует равенство

$$R^2 = (R+h)^2 + r_B^2 - 2(R+h) \cdot r_B \cdot \cos \gamma. \quad (2.86)$$

Из этого равенства, решая квадратное уравнение относительно  $r_B$ , можно найти зависимость  $r_B(\gamma)$

$$r_{B_{1,2}} = (R+h) \cos \gamma \pm \sqrt{(R+h)^2 \cos^2 \gamma - h^2 - 2Rh}. \quad (2.87)$$

Выражение (2.87) указывает на наличие ветвления функции  $r_B(\gamma)$ . Это связано с тем, что кольцевой ток  $D$  и  $D'$  разбивается на два участка: первый участок  $D C D'$  создает в точке  $A$  магнитное поле с направлением  $d\vec{B}_A$  (выбирается знак « $\rightarrow$ » в (2.87)); второй  $D B D'$  создает в точке  $A$  магнитное поле противоположное направлению  $d\vec{B}_A$  (выбирается знак « $+$ » в (2.87)).

Тогда интегрирование для первого участка  $D C D'$  может быть представлено в виде

$$B_{A1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\gamma_m} \frac{d\gamma}{r_{B1}(\gamma)}. \quad (2.88)$$

При записи (2.88) учтена четность функции  $r_{B1}(\gamma)$  относительно  $\gamma$ .

Разделим обе части (2.88) на поле в центре кольца (2.2)  $B_{\text{ц}} = \mu_0 I / (2R)$

$$\frac{B_{A1}}{B_{\text{ц}}} = \frac{R}{\pi} \int_0^{\gamma_m} \frac{d\gamma}{r_{B1}(\gamma)}. \quad (2.89)$$

Введем обозначения

$$a = (R+h) \cdot \cos \gamma, \quad (2.90)$$

$$b = \sqrt{(R+h)^2 \cos^2 \gamma - h^2 - 2Rh}, \quad (2.91)$$

а интегрирование в (2.89) представим в виде

$$\frac{B_{A1}}{B_{\text{ц}}} = \frac{R}{\pi} \int_0^{\gamma_m} \frac{(a+b)d\gamma}{a^2-b^2} \quad (2.92)$$

и разобьем его на два интеграла

$$\frac{\pi}{R} \frac{B_{A1}}{B_{\text{ц}}} = I_1 + I_2, \quad (2.93)$$

где

$$I_1 = \int_0^{\gamma_m} \frac{a d\gamma}{a^2 - b^2}; \quad I_2 = \int_0^{\gamma_m} \frac{b d\gamma}{a^2 - b^2}.$$

Интегрирование для второго участка  $D B D'$  представим в аналогичном виде, как и в (2.88):

$$B_{A2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\gamma_m} \frac{d\gamma}{r_{B2}(\gamma)}. \quad (2.94)$$

Применяя те же операции и обозначения, как и в (2.88), получим, что интеграл в (2.94) может быть представлен в виде

$$\frac{\pi}{R} \frac{B_{A2}}{B_{\text{ц}}} = I_1 - I_2. \quad (2.95)$$

Учитывая направления полей  $B_{A1}$  и  $B_{A2}$ , подставляя (2.93) и (2.95), получим для результирующего поля

$$\frac{\pi}{R} \frac{B_A}{B_{\text{ц}}} = \frac{\pi}{R} \left( \frac{B_{A1}}{B_{\text{ц}}} - \frac{B_{A2}}{B_{\text{ц}}} \right) = 2I_2. \quad (2.96)$$

Решение задачи свелось к вычислению только одного интеграла  $I_2$ , который можно привести к выражению

$$I_2 = \frac{R+h}{a^2-b^2} \int_0^{\gamma_m} \sqrt{\sin^2 \gamma_m - \sin^2 \gamma} \cdot d\gamma. \quad (2.97)$$

Выделим из (2.97) интеграл

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\gamma_m} \frac{(\sin^2 \gamma_m - \sin^2 \gamma) \cdot d\gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma_m - \sin^2 \gamma}} = \\ &= \sin^2 \gamma_m \int_0^{\gamma_m} \frac{d\gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma_m - \sin^2 \gamma}} - \int_0^{\gamma_m} \frac{\sin^2 \gamma d\gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma_m - \sin^2 \gamma}}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Вводя новую переменную интегрирования

$$\sin \xi = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma_m} \quad (2.99)$$

с новыми пределами интегрирования  $\xi_1 = 0, \gamma_1 = 0$  и  $\xi_2 = \pi/2, \gamma_2 = \gamma_m$  и преобразуя (2.98) с учётом того, что

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \sqrt{1 - \sin^2 \xi \sin^2 \gamma_m}; \\ d\gamma &= \frac{\cos \xi}{\cos \gamma} \sin \gamma_m d\xi = \frac{\cos \xi \cdot \sin \gamma_m \cdot d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \xi \sin^2 \gamma_m}}; \end{aligned} \quad (2.100)$$

придем к комбинации полных эллиптических интегралов [13]:

$$I_3 = E(k) - (1 - k^2)K(k), \quad (2.101)$$

где  $k^2 = \sin^2 \gamma_m$  – квадрат модуля эллиптических интегралов первого и второго родов. Подставляя результат (2.101) в (2.96), получим

$$\frac{B_A}{B_{\text{ц}}} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{R(R + h)}{h(2R + h)} \cdot [E(k) - (1 - k^2)K(k)]. \quad (2.102)$$

Соотношение (2.102) описывает радиальное распределение магнитного поля вне кольца в области  $r > R$  или  $h > 0$  для произвольных радиусов кольца  $R$ .

На рис. 2.14 в координатах  $B_A/B_{\text{ц}} = f(h/R)$ , где  $B_A/B_{\text{ц}}$  – приведенное значение индукции, а  $h/R$  – приведенное значение координаты точки наблюдения  $A$ , отсчитываемой от геометрического проводника, представлено радиальное распределение индукции магнитного поля вне кольца, даваемое формулой (2.102).

В таблице 2.2 представлены результаты вычислений с удвоенной точностью радиального распределения поля, выполненных по формуле (2.102).

Таблица 2.2

Результаты численного моделирования радиального распределения магнитной индукции вне кольца

$h/R$	$B_A/B_{\text{ц}}$
.02000	14.97407
.03000	9.73797
.04000	7.13524
.05000	5.58294
.06000	4.55438
.07000	2.82426
.08000	2.28012
.09000	2.85962
.10000	2.52539
.11000	2.25374
.12000	2.02886
.13000	1.83985
.14000	1.67894
.15000	1.54043
.16000	1.42007
.17000	1.31460
.18000	1.22150
.19000	1.13877
.20000	1.06485



.21000	.99843
.22000	.93848
.23000	.88412
.24000	.83466
.25000	.78947
.26000	.74805
.27000	.70998
.28000	.67488
.29000	.64243
.30000	.61236
.31000	.58444
.32000	.55844
.33000	.53420
.34000	.51155
.35000	.49035
.36000	.47046
.37000	.45179
.38000	.43423
.39000	.41768
.40000	.40208
.41000	.38735
.42000	.37341
.43000	.36022
.44000	.34772
.45000	.33586
.46000	.32460
.47000	.31389
.48000	.30370
.49000	.29400
.50000	.28475
.51000	.27592
.52000	.26750
.53000	.25945
.54000	.25175
.55000	.24439
.56000	.23734
.57000	.23058
.58000	.22410
.59000	.21789
.60000	.21192
.61000	.20619
.62000	.20068
.63000	.19539
.64000	.19030
.65000	.18539
.66000	.18067
.67000	.17612
.68000	.17173

.69000	.16750
.70000	.16342
.71000	.15948
.72000	.15568
.73000	.15201
.74000	.14846
.75000	.14502
.76000	.14170
.77000	.13849
.78000	.13538
.79000	.13237
.80000	.12946
.81000	.12663
.82000	.12389
.83000	.12124
.84000	.11867
.85000	.11617
.86000	.11375
.87000	.11140
.88000	.10911
.89000	.10690
.90000	.10474
.91000	.10265
.92000	.10062
.93000	.09864
.94000	.09672
.95000	.09485
.96000	.09303
.97000	.09126
.98000	.08953
.99000	.08785
1.00000	.08622

На рис. 2.14 представлена графическая зависимость распределения индукции магнитного поля вне кольца.

Из рис. 2.14 и выражения (2.102) видно, что в начале координат магнитное поле имеет особенность, а при больших  $h/R \gg 1$  быстро уменьшается. Уже на расстоянии  $h/R = 1$  оно имеет значение  $B(1) = 8,62\%$  от  $B_{\text{ц}}$ .

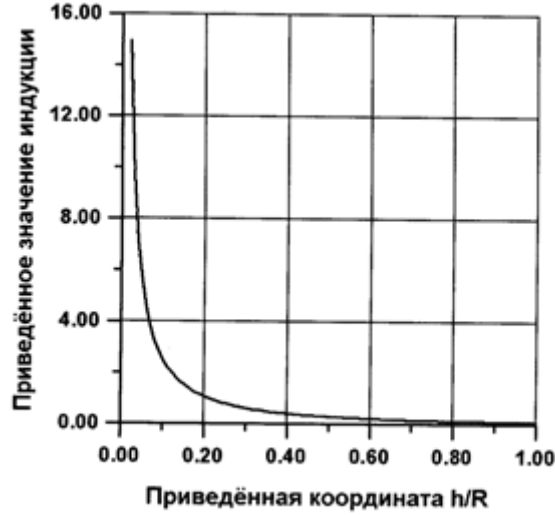


Рис. 2.14. Распределение индукции магнитного поля вне кольца

Проверим результаты численного моделирования выражения (2.102). Получим закон спада поля при выполнении условия  $h/R \gg 1$ . При этом условии модуль эллиптических интегралов становится малой величиной ( $k \ll 1$ )

$$k^2 = \frac{R^2}{(R+h)^2} \approx \frac{R^2}{h^2} \ll 1. \quad (2.103)$$

Воспользуемся рядами разложения полных эллиптических интегралов при малом значении модуля  $k < 1$ :

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 - \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right]; \quad (2.104)$$

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 k^4 + \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 k^6 + \dots \right]. \quad (2.105)$$

Следует заметить, что приводимое на с. 404 в [13] разложение полных эллиптических интегралов ошибочно. В нём значение  $m$  следует заменить на  $k^2$ . Запишем разложение функции в квадратных скобках (2.102), сохраняя два члена ряда:

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{k^2}{4} \right), \quad (2.106)$$

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{k^2}{4} \right). \quad (2.107)$$

Тогда

$$f(k) = E(k) - (1 - k^2)K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left( \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{4} \right). \quad (2.108)$$

Отбросив слагаемое со значением  $k^4$ , получим

$$f(k) \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2 h^2}. \quad (2.109)$$

Учитывая, что разложение множителя перед  $f(k)$  имеет вид  $\approx 2R/(\pi h)$ , получим закон изменения магнитного поля в дальней зоне при выполнении условия  $h/R \gg 1$

$$\frac{B(\infty)}{B_{\text{ц}}} = \frac{2R}{\pi h} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^2}{2h^2} = \frac{1}{2} \frac{R^3}{h^3}. \quad (2.110)$$

Из (2.110) следует, что поле в дальней зоне убывает очень быстро: обратно пропорционально кубу расстояния  $\sim 1/(h/R)^3$ . Это дает возможность рассчитывать поле в дальней зоне, не прибегая к вычислению эллиптических интегралов. Уже при  $h/R = 10^2$ , значение поля уменьшается до величины  $B(h/R) = B_{\text{ц}} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}$ , то есть практически отсутствует. На расстоянии  $h = 2R$  поле принимает значение  $B(2) = B_{\text{ц}}/16 \approx 0,062B_{\text{ц}}$ .

Определим, какой вид особенности дает (2.102) при выполнении условия  $h/R \ll 1$ . В этом пределе значение модуля немного меньше единицы

$$k^2 = \frac{1}{(1 + h/R)^2} \approx 1 - 2h/R. \quad (2.111)$$

Но при  $k \rightarrow 1$  полный эллиптический интеграл первого рода имеет логарифмическую особенность [44]:

$$K(k) \approx \frac{1}{2} \ln \left( \frac{16}{1 - k^2} \right). \quad (2.112)$$

Вводя новую переменную  $x = k$ , определим предел, к которому стремится второе слагаемое в квадратных скобках в (2.102)

$$\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = \frac{(x^2 - 1)}{2} \ln \left( \frac{16}{1 - x^2} \right) = 0. \quad (2.113)$$

Тогда с учетом того, что  $E(1) \rightarrow 1$ , получим

$$\frac{B_A}{B_{\text{ц}}} \approx \frac{2}{\pi} \cdot \frac{R}{2h} = \frac{R}{\pi h}. \quad (2.114)$$

Подставим в (2.114) значение  $B_{\text{ц}}$  из (1.2)

$$B_A = \frac{R}{\pi h} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}. \quad (2.115)$$

Из (2.114) видно, что при малых значениях  $h/R \ll 1$  магнитное поле у кольца имеет особенность  $\sim 1/h$ . Это такая же особенность, какую имеет бесконечно длинный прямой геометрический проводник. Как указывалось выше, особенность обусловлена тем, что точка наблюдения  $A$  все ближе подходит к месту расположения геометрического проводника.

Проверим расчетную точку  $h/R = 0,02$  по формуле (2.114):  $B_A/B_{\text{ц}} = 1/(3,14 \cdot 0,02) \approx 15,91$ . Полученное значение с погрешностью в 6%

совпадает с табличным. Какие выводы можно сделать из проделанных расчётов?

При малых значениях  $h \ll R$  радиальное распределение магнитного поля вне кольца имеет такую же особенность, какую имеет длинный прямой геометрический проводник с током.

С увеличением расстояния  $h/R$  магнитное поле быстро спадает. Уже на расстоянии  $h/R = 1$  оно имеет значение 8,62% от индукции магнитного поля в центре кольца.

Индукция магнитного поля в дальней зоне убывает обратно пропорционально кубу расстояния и уже на расстоянии  $h = 2R$  оно принимает значение 6,2% от индукции магнитного поля в центре кольца.

Радиальное распределение  $B(r)$  магнитного поля кольца при переходе через точку  $r = R$  изменяет свой знак на противоположный и имеет бесконечный разрыв.

Производная радиального распределения поля при  $0 < r < R$  положительна и стремится к  $+\infty$  при приближении к точке разрыва  $r = R$  слева. В области  $r > R$  производная распределения также положительна и стремится к  $+\infty$  при приближении к точке разрыва  $r = R$  справа.

### 2.1.3. Потокосная часть индуктивности плоского токового кольца с конечной радиальной шириной

Как было выяснено в разделе 2.1.1, при протекании тока по кольцу внутри него формируется неоднородное магнитное поле. Это поле через площадь кольца  $S = \pi R^2$  создает собственный магнитный поток:

$$\Phi_c = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_*} B_A(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi. \quad (2.116)$$

Если верхний предел интегрирования  $r_*$  приравнять к  $R$ , то интеграл (2.116) равен  $\infty$ . Это связано с существованием особенности вида (2.77) у распределения магнитного поля  $B_A(r)$  при  $r \rightarrow R$ .

Причина этой особенности заключается в том, что точка наблюдения  $A$  при  $\delta \rightarrow 0$  все ближе перемещается к месту расположения геометрического проводника.

Как было показано из решения дифференциальных уравнений в разделе 2, распределение магнитного поля круглого прямого тока с конечным радиусом не имеет особенностей на поверхности проводника и при больших  $r/R$  убывает обратно пропорционально  $r/R$ .

Этот факт позволяет обрывать распределение магнитного поля в (2.116) в точке  $r_* = r$  и считать, что в формуле (2.74) параметр  $\delta$  играет роль конечной радиальной ширины металлического покрытия токового

кольца (см. рис. 2.15). В этом приближении далее вычислены основные физические параметры кольца.

Все ранее решённые задачи были одномерные, но относились к 2D типу геометрии, поскольку рассматривалось плоское кольцо, толщина которого  $H$  была значительно меньше внешнего радиуса кольца.

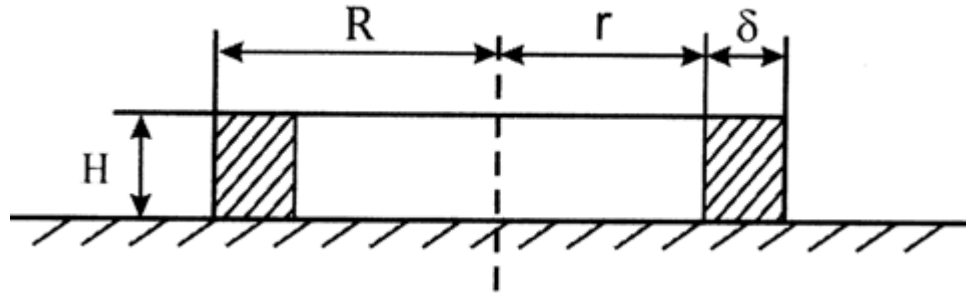


Рис. 2.15. Геометрические размеры цилиндрического токового кольца

Заменяя в (2.116)  $r_*$  на  $r$ , который играет теперь роль радиуса полости кольца, и вводя безразмерную переменную  $x = r/R$ , приведем (2.116) к виду:

$$\frac{\Phi_c}{\Phi_*} = \int_0^x \left[ \frac{E(k)}{1-x} + \frac{K(k)}{1+x} \right] x \cdot dx, \quad (2.117)$$

где  $k = 2\sqrt{x}/(1+x)$ ,  $\Phi_* = \mu_0 i R$  – масштаб потока. При получении (2.117) в (2.116) было выполнено интегрирование по углу.

Индуктивность  $L$  по определению дается соотношением

$$\Phi_c = L \cdot i. \quad (2.118)$$

В (2.118) индуктивность связывает ток в кольце и собственный поток, который этот ток создает. В связи с этим индуктивность в (2.118) удобно назвать потоковой индуктивностью. В неё не входит индуктивность, которая может возникать из-за взаимодействия тока в проводнике, с потоком, создаваемым этим током внутри проводника.

Разделив обе части (2.118) на масштаб потока, получим

$$\frac{\Phi_c}{\Phi_*} = \frac{L \cdot i}{\mu_0 i R} = \frac{L}{L_*}, \quad (2.119)$$

где  $L_* = \mu_0 R$  – масштаб потоковой индуктивности кольца. Он линеен по радиусу и определяет исходную геометрию кольца. Заметим, что его значение меньше в  $2/\pi$  раз значения оценочной индуктивности кольца  $L_0$  [см. (2.4)].

Формула (2.119) указывает на то, что и приведенный поток (2.117) и приведенное значение индуктивности (2.119) совпадают друг с другом по величине и определяются значением интеграла, стоящего в правой части (2.117). Проинтегрировать (2.117) в аналитическом виде не удастся.

Вычисление интеграла проводилось по формуле прямоугольников, и шаг интегрирования выбирался таким, чтобы была обеспечена точность вычислений вплоть до четвертого знака после запятой.

В таблице 2.3 представлены результаты вычислений с удвоенной точностью в виде зависимости приведённой индуктивности кольца  $L/L_*$  от приведённого параметра  $r/R$ .

Таблица 2.3

Численное моделирование зависимости приведённой индуктивности кольца от приведённого радиуса

$r / R$        $L / L_*$

.1000	.0049
.1100	.0060
.1200	.0071
.1300	.0084
.1400	.0097
.1500	.0112
.1600	.0127
.1700	.0144
.1800	.0162
.1900	.0181
.2000	.0201
.2100	.0221
.2200	.0244
.2300	.0267
.2400	.0291
.2500	.0316
.2600	.0343
.2700	.0371
.2800	.0399
.2900	.0430
.3000	.0461
.3100	.0493
.3200	.0527
.3300	.0562
.3400	.0598
.3500	.0636
.3600	.0675
.3700	.0715
.3800	.0756
.3900	.0799
.4000	.0844
.4100	.0890
.4200	.0937
.4300	.0986
.4400	.1036
.4500	.1088

.4600	.1142
.4700	.1197
.4800	.1254
.4900	.1313
.5000	.1374
.5100	.1436
.5200	.1500
.5300	.1567
.5400	.1635
.5500	.1706
.5600	.1778
.5700	.1853
.5800	.1930
.5900	.2010
.6000	.2092
.6100	.2177
.6200	.2264
.6300	.2354
.6400	.2448
.6500	.2544
.6600	.2644
.6700	.2747
.6800	.2853
.6900	.2964
.7000	.3078
.7100	.3196
.7200	.3319
.7300	.3447
.7400	.3580
.7500	.3718
.7600	.3862
.7700	.4012
.7800	.4169
.7900	.4333
.8000	.4505
.8100	.4685
.8200	.4875
.8300	.5076
.8400	.5288
.8500	.5512
.8600	.5752
.8700	.6008
.8800	.6283
.8900	.6579
.9000	.6902
.9100	.7255
.9200	.7646
.9300	.8082



.9400	.8578
.9500	.9153
.9600	.9836
.9700	1.0683
.9800	1.1799
.9900	1.3451
.9950	1.4713

Как видно из табл. 2.3, значения приведенной индуктивности изменяются в пределах от 0,0049 при  $r/R = 0,1$  до 1,4713 при  $r/R = 0,995$ . Из чего видно, что при малых значениях отверстия кольца  $r$  реализуется случай малых, по сравнению с масштабом, индуктивностей, а при  $r \rightarrow R$  (большие значения отверстия кольца  $r$ ) реализуется случай больших, по сравнению с масштабом, индуктивностей.

Представляет интерес рассмотреть эти предельные случаи аналитически. Для случая малых индуктивностей выполнено условие  $r/R \ll 1$ . Поэтому для их вычисления в (2.116) следует подставить решение (2.80) в виде ряда с чётными степенями, который быстро сходится

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{L_*} &= \int_0^x \left( 1 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{45}{64}x^4 + \frac{175}{250}x^6 + \dots \right) x dx \approx \\ &\approx \frac{x^2}{2} + \frac{3}{16}x^4 + \frac{45}{384}x^6 + \frac{175}{2048}x^8 + \dots \end{aligned} \quad (2.120)$$

Подставляя в (2.120) предельное значение  $x/R = 0,1$ , получим  $L_1/L_* \approx 0,5018 \cdot 10^{-2}$ , что очень близко к результату, приведенному в табл. 2.3.

Случай больших, по сравнению с масштабом, индуктивностей реализуется в приближении  $\delta/R \ll 1$ . В этом приближении точное подынтегральное выражение (2.117) можно заменить радиальным распределением магнитного поля (2.76). Вводя переменную  $t = \delta/R$ , интеграл (2.117) приведем к виду (2.121) и проинтегрируем

$$\frac{L_2}{L_*} \sim \int_t^1 \frac{(1-t)dt}{t} \approx \ln\left(\frac{R}{\delta}\right) - 1. \quad (2.121)$$

Из (2.121) видно, что оценочное соотношение для индуктивности кольцевого тока с бесконечно тонкой радиальной шириной имеет логарифмическую расходямость. Может показаться, что таким образом можно решить проблему большой индуктивности в малых геометрических размерах. На самом деле это не так.

Сделаем оценки диапазона индуктивностей, которые дают реальные размеры колец. Для радиуса кольца  $R_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  м с радиусом полости  $r = 50$  мкм (на два порядка ниже) вычислим параметр  $x = r/R = 0,01$ . Он малый и мы попадаем в диапазон малых индуктивностей. Используя соотношение (2.120), получим  $L_1/L_* = 0,5 \cdot 10^{-4}$ . Величина  $L_* = 4\pi \cdot$

$10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 20\pi \cdot 10^{-10}$  Гн. Окончательно значение  $L_1 = 0,5 \cdot 10^{-4} \cdot 20\pi \cdot 10^{-10} = 10\pi \cdot 10^{-14} = 3,14 \cdot 10^{-13}$  Гн = 0,314 пГн.

Если радиус полости этого кольца увеличить до значения  $x = r/R = 0,99$ , то  $\delta/R = 0,01$ , и мы попадаем в диапазон больших индуктивностей. Используя соотношение (2.121), получим  $L_2/L_* = 3,6$  (кстати, табличное значение в 2,68 раза меньше). Поэтому оценочное соотношение (2.121) лучше использовать для значений  $\delta/R < 10^{-3}$ . Сохраняя табличное значение  $L_2/L_* = 1,345$ , получим значение индуктивности  $L_2 = 1,345 \cdot 20\pi \cdot 10^{-10} = 84,5 \cdot 10^{-10} = 8,45$  нГн.

Реальные значения индуктивности для кольца радиусом  $R = 0,5$  см лежат в диапазоне значений от 0,314 пГн до 8,45 нГн при изменении радиальной ширины кольца в диапазоне от 4,95 мм до 50 мкм. Заметим, что оценочное значение индуктивности  $L_0$  (см. 2.4) выше верхней границы диапазона.

Для радиуса кольца  $R_2 = 5 \cdot 10^{-4}$  м с радиусом полости  $r = 5$  мкм (на два порядка ниже)  $x = r/R = 0,01$ . Используя (2.120), получим  $L_1/L_* = 0,5 \cdot 10^{-4}$ ;  $L_* = 2\pi \cdot 10^{-10}$  Гн. Значение  $L_1 = 0,0314$  пГн. Если радиус полости этого кольца увеличить до значения  $x = r/R = 0,99$ , то  $L_2 = 0,845$  нГн.

Реальные величины индуктивности для кольца радиусом  $R = 0,5$  мм сдвигаются к малым значениям и лежат в диапазоне от 0,0314 пГн до 0,845 нГн при изменении радиальной ширины кольца в пределах от 0,495 мм до 5 мкм.

Покажем, что расчетные формулы (2.117), (2.120) и (2.121) дают результаты того же порядка, что и экспериментальные. Так эксперименты, измеряющие зависимость значения индуктивности от радиуса витка (для радиусов 300, 400 и 600 мкм) и от его радиальной толщины, изменяющейся в пределах от 10 до 100 мкм, дают значения индуктивности витка, варьируемой в пределах от 1 до 3,5 нГн [45]. При этом для всех индуктивностей, независимо от величины их основного радиуса, проявляется следующая закономерность: с ростом радиальной толщины напыления индуктивность кольца уменьшается.

Промоделируем по формуле (2.117) числовые значения индуктивностей с радиусами 300, 400 и 600 мкм при изменении радиальной ширины напыления  $\delta$  в пределах от 10 до 100 мкм. В табл. 2.4 представлены результаты такого моделирования. В первой колонке дана в микронах радиальная ширина напыления  $\delta$ , во второй колонке даны значения индуктивности в нГн для кольца радиусом 600 мкм, в третьей колонке – значения индуктивности для кольца радиусом 400 мкм, а в четвертой индуктивность для кольца радиусом в 300 мкм. Индуктивности рассчитаны с удвоенной точностью.

По таблице 2.4 была построена графическая зависимость индуктивностей  $L = f(\delta)$  от радиальной ширины кольца и представлена на

рис. 2.16 для трех значений радиуса. Как видно из таблицы 2.4. и рис. 2.16, теория указывает на то, что с ростом радиальной ширины напыления индуктивность кольца уменьшается.

Таблица 2.4

Численное моделирование зависимости индуктивности колец от радиальной ширины напыления

$\delta$ , мкм	$L_1$ , нГн	$L_2$ , нГн	$L_3$ , нГн
10.000	.946	.573	.397
11.000	.926	.558	.386
12.000	.907	.545	.376
13.000	.890	.533	.366
12.000	.874	.522	.357
15.000	.859	.511	.349
16.000	.845	.501	.341
17.000	.831	.491	.334
18.000	.818	.482	.327
19.000	.806	.474	.320
20.000	.794	.465	.314
21.000	.783	.457	.308
22.000	.772	.450	.302
23.000	.761	.443	.296
22.000	.751	.436	.291
25.000	.742	.429	.286
26.000	.732	.422	.281
27.000	.723	.416	.276
28.000	.715	.410	.271
29.000	.706	.404	.267
30.000	.698	.398	.262
31.000	.690	.393	.258
32.000	.682	.388	.254
33.000	.675	.382	.250
32.000	.667	.377	.246
35.000	.660	.372	.242
36.000	.653	.368	.238
37.000	.647	.363	.235
38.000	.640	.358	.231
39.000	.634	.354	.228
40.000	.627	.350	.225
41.000	.621	.345	.221
42.000	.615	.341	.218

43.000	.609	.337	.215
42.000	.603	.333	.212
45.000	.598	.329	.209
46.000	.592	.325	.206
47.000	.587	.322	.203
48.000	.581	.318	.201
49.000	.576	.314	.198
50.000	.571	.311	.195
51.000	.566	.307	.192
52.000	.561	.304	.190
53.000	.556	.301	.187
52.000	.551	.297	.185
55.000	.547	.294	.182
56.000	.542	.291	.180
57.000	.538	.288	.178
58.000	.533	.285	.175
59.000	.529	.282	.173
60.000	.524	.279	.171
61.000	.520	.276	.169
62.000	.516	.273	.166
63.000	.512	.270	.164
62.000	.508	.267	.162
65.000	.504	.265	.160
66.000	.500	.262	.158
67.000	.496	.259	.156
68.000	.492	.257	.154
69.000	.488	.254	.152
70.000	.484	.251	.150
71.000	.481	.249	.148
72.000	.477	.246	.146
73.000	.473	.244	.144
72.000	.470	.242	.143
75.000	.466	.239	.141
76.000	.463	.237	.139
77.000	.459	.234	.137
78.000	.456	.232	.136
79.000	.453	.230	.134
80.000	.449	.228	.132
81.000	.446	.225	.131
82.000	.443	.223	.129
83.000	.440	.221	.127
82.000	.436	.219	.126

85.000	.433	.217	.124
86.000	.430	.215	.123
87.000	.427	.213	.121
88.000	.424	.211	.120
89.000	.421	.209	.118
90.000	.418	.207	.117
91.000	.415	.205	.115
92.000	.412	.203	.114
93.000	.409	.201	.112
92.000	.407	.199	.111
95.000	.404	.197	.109
96.000	.401	.195	.108
97.000	.398	.193	.107
98.000	.396	.191	.105
99.000	.393	.190	.104
100.000	.390	.188	.103

Это ясно из физических соображений. При увеличении ширины напыления уменьшается площадь круга, через которую создается поток. Уменьшение площади круга приводит к уменьшению количества силовых линий, пронизывающих круг. Уменьшение потока эквивалентно уменьшению индуктивности.

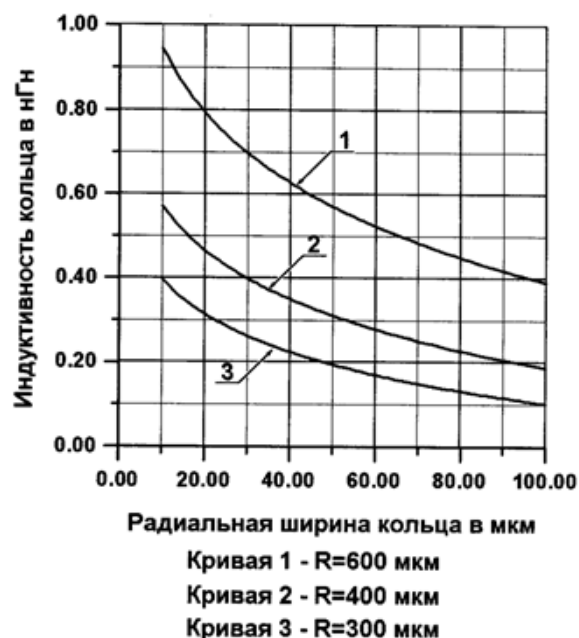


Рис. 2.16. Теоретические зависимости индуктивности кольца от его радиальной ширины

Представляет интерес точное сравнение полученных результатов с экспериментом. На рис. 2.17 приведены экспериментальные результаты

измерений индуктивности кольца и её зависимость от ширины слоя покрытия [45].

На рис. 2.17 приняты следующие обозначения: ширина металлизированного слоя  $w$ , совпадает с нашим  $\delta$ ;  $D_n$  – значение внешнего диаметра кольца совпадает с удвоенным радиусом  $R$ . Из сравнения рис. 2.16 и рис. 2.17 видно, что для радиуса  $R_1 = 600$  мкм при ширине слоя 10 мкм индуктивность кольца экспериментальная  $L_э$  больше, чем теоретическая  $L_T$  в 3,6 раза. На ширине слоя 100 мкм  $L_э$  больше, чем  $L_T$  в 5,13 раза.

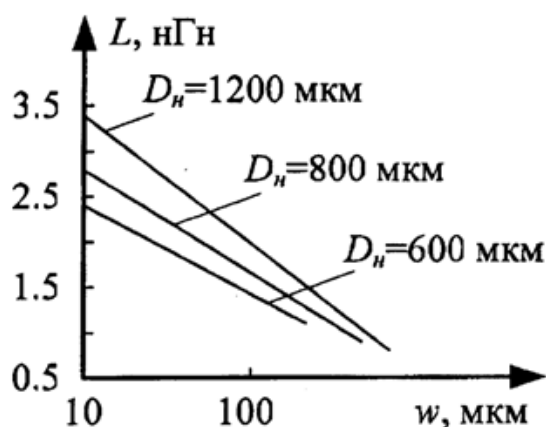


Рис. 2.17. Зависимость индуктивности кольца от ширины слоя напыления [45]

Тоже самое, можно сказать и о других индуктивностях. Для радиуса  $R_3 = 300$  мкм это отличие еще больше. При ширине слоя 10 мкм индуктивность  $L_э$  больше, чем  $L_T$  в 5,8 раза.

Чем можно объяснить такое существенное отличие?

1. При расчётах было принято, что основной вклад в индуктивность даёт её потоковая часть. Токовую часть индуктивности вычислить невозможно в связи с расходямостью потоковых интегралов на верхнем пределе интегрирования при  $r_* \rightarrow R$  в (2.116).
2. При расчетах индуктивности кольца не принималась во внимание индуктивность проводника, подводящего ток в систему в месте контакта. Это несколько увеличит полученные теоретические значения.
3. В экспериментах также не учитывалось существование погонной индуктивности самих проводников, подводящих электрический ток к кольцу. Как показано ниже, она может в разы увеличить истинную индуктивность кольца.
4. Эксперименты проводились на высоких частотах, при которых уже проявляет себя скин-эффект.

#### 2.1.4. Добротность потоковой части индуктивности

Теоретическое значение индуктивности (2.119) следует считать некоторым эталоном, рассчитанным для постоянного тока. Она остаётся неизменной и для переменного тока в той области частот, когда фазовый сдвиг между током и потоком остаётся нулевым.

Для этой области частот статическая индуктивность (2.119) остаётся неизменной, т.е. частотно-независимой. Определим интервал частот, в котором можно получить приемлемые значения её добротности.

Реактивное сопротивление индуктивности (2.119) – линейная функция частоты

$$x_L = \omega L. \quad (2.122)$$

Как известно, добротность индуктивности вычисляется из соотношения

$$Q = \omega L / R_0, \quad (2.123)$$

где

$$R_0 = \rho l / S, \quad (2.124)$$

– омическое сопротивление кольца, взятое по его средней линии  $l$ ,  $\rho$  – удельное сопротивление материала, из которого сделано кольцо, а  $S$  – площадь его поперечного сечения, которое совпадает с площадью поперечного сечения токового пучка.

Подставляя (2.124) в (2.123), получим для добротности

$$Q = \frac{\omega L \delta H}{2 \pi \rho r_s}, \quad (2.125)$$

где  $H$  – аксиальная толщина слоя металлизации,

$$r_s = R - \delta / 2 \quad (2.126)$$

– радиус средней линии кольца. Из (2.125) видно, что добротность потоковой индуктивности также оказывается линейной функцией частоты переменного тока.

Нижняя характеристическая частота следует из (2.125) при требовании  $Q=1$

$$\omega_{l*} = \frac{2 \pi r_s \rho}{L \delta H}. \quad (2.127)$$

Как видно из (2.127), она будет для одинаковых колец тем выше, чем больше удельное сопротивление применяемого проводника.

Оценим её значение для кольца со следующими параметрами: радиус 600 мкм, толщина напыления меди ( $\rho=16$  нОм·м)  $H=5$  мкм, радиальная ширина  $\delta=10$  мкм. Из оценки следует, что в рассматриваемом случае добротность индуктивности из меди будет больше единицы для частот  $\nu > \nu_{l*} = 0,2$  ГГц. Это указывает на то, что такие кольца будут давать высокую добротность на частотах десятки ГГц, что и наблюдается в экспериментах. Для того же кольца, выполненного из алюминия ( $\rho=28$  нОм·м), нижняя характеристическая частота будет выше в 1,75 раза.

Понижение нижней частоты возможно при увеличении толщины напыления  $H$ .

Оценим границу применимости полученных результатов на высоких частотах. Её можно получить, исследуя времена установления неоднородных магнитных полей в кольце. Будем считать, что эти времена связаны со скоростью передачи электро-магнитных взаимодействий – скоростью света. Тогда характерное время установления  $\tau = R/c$ , где  $R$  – радиус кольца, даёт значение верхней характеристической частоты  $\nu_{h*} = 1/\tau = c/R$ . Для того же кольца её значение получается 500 ГГц. На современном этапе развития интегральных технологий эти частоты пока не достигнуты.

### 2.1.5. Моделирование частотных свойств индуктивности токового кольца в симуляторе HFFS – Ansoft. Сравнение результатов с экспериментами

Моделирование индуктивных свойств уединённого планарного одновиткового медного кольца проводилось на симуляторе HFFS – Ansoft. Использовалась версия программы 2010 года. На рис. 2.18 представлена базовая конструкция планарной индуктивности (прототип). Как видно из рис. 2.18, индуктивность была выполнена из медной металлической плёнки (слой) с определённой толщиной металлизации, которая лежала на поверхности подложки. Внутренний радиус плёнки имел значение 500 мкм, а внешний – 750 мкм.

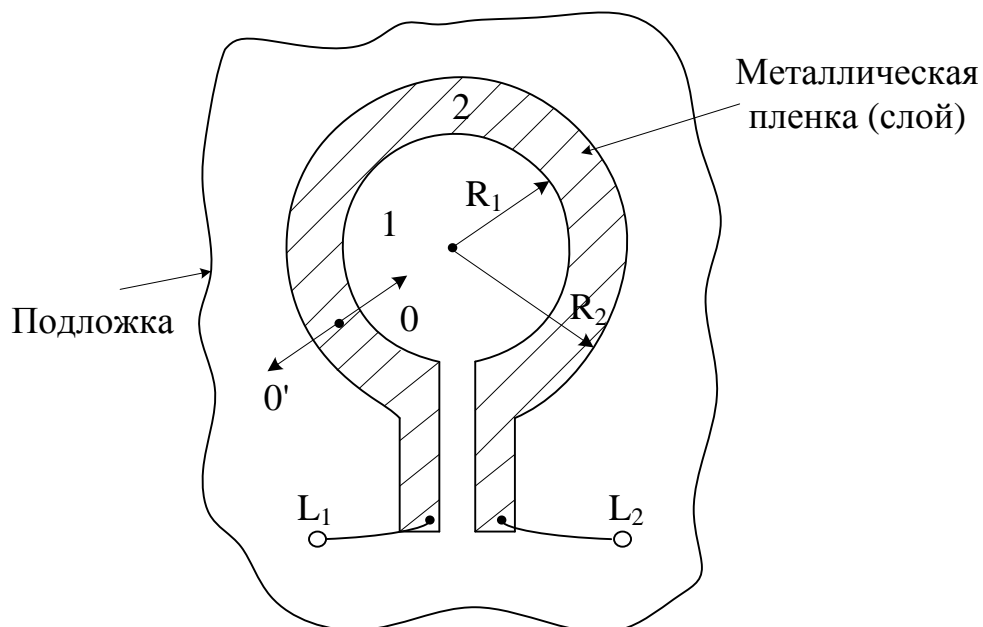


Рис. 2.18. Базовая конструкция планарной индуктивности кольца

На рис. 2.19 показан поперечный разрез модели кольцевой индуктивности с добавлением охранного земляного квадрата GND с



размерами 2250x2250 мкм. На рисунке принято обозначение толщины металлизации (толщина слоя) буквой  $t$ . Как видно из рис. 2.19, плёнка была изолирована от металлической подложки и нагружена на вакуум ( $E_r=1$ ).

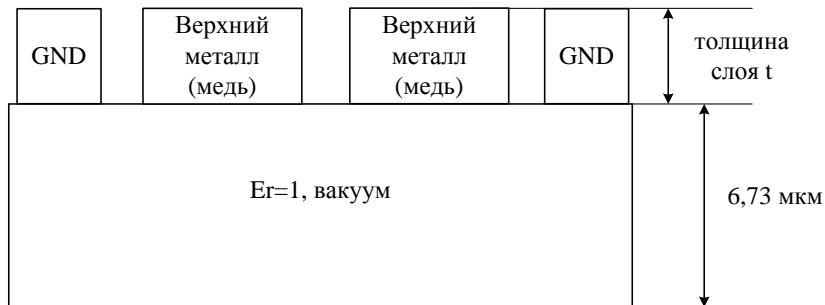


Рис. 2.19. Поперечный разрез модели

На рис. 2.20 дано представление аксонометрической проекции модели индуктивности кольца в симуляторе HFFS – Ansoft. В ней один порт ввода (Port 1) вводит ток в интегральную индуктивность. Вывод тока осуществлялся вторым портом через соединение с «землёй» идеальным проводником. Толщина слоя металлизации  $t$  изменялась в пределах от 10 до 100 мкм. Вниз рисунка вынесен масштаб длины.

Программа позволяет рассчитывать частотные зависимости индуктивности  $L$  и добротности  $Q$  кольца, которые находятся по формулам:

$$L = \text{imag}(Z_{in}) / 2\pi f \quad (2.128)$$

$$Q = \text{imag}(Z_{in}) / \text{real}(Z_{in}) . \quad (2.129)$$

В формулах введено обозначение  $Z_{in}$  – комплексное сопротивление индуктивности.

На рис. 2.21 представлен первый результат моделирования – частотная зависимость индуктивности кольца с толщиной слоя металлизации 80 мкм в широком диапазоне частот от 0,75 ГГц до 20 ГГц. Отмечены контрольные точки m1: частота 4 ГГц, индуктивность 1,706 нГн; m2: частота 17,1 ГГц, индуктивность 36,1 нГн. Эти контрольные точки указывают на возможность изменения индуктивности кольцевого тока в 21 раз при изменении частоты всего в 4,3 раза. В соответствии с диаграммой Смита, численное моделирование предсказывает на частоте 17,5 ГГц смену индуктивного характера комплексного сопротивления на ёмкостной.

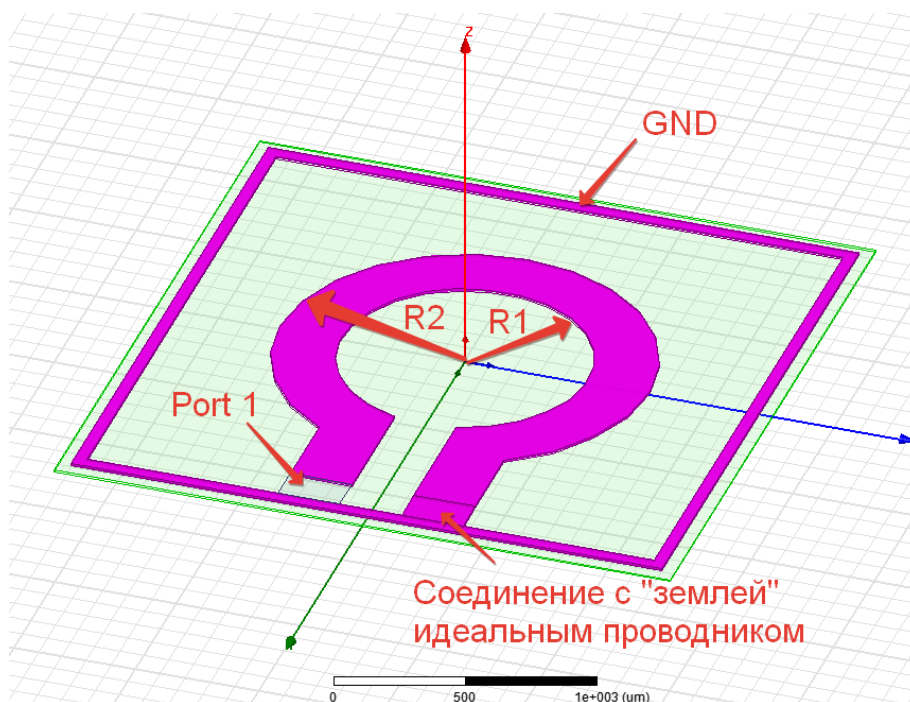


Рис. 2.20. Модель индуктивности кольца в симуляторе HFSS – Ansoft

На рис. 2.22 представлен второй результат моделирования, который показывает, как изменяется индуктивность кольцевого тока с изменением толщины металлизации. Из него видно, что с уменьшением толщины металлизации от 100 до 10 мкм приводит к увеличению индуктивности кольца от 1,62 нГн до 2,08 нГн на частоте 4 ГГц. Чем меньше толщина металлизации, тем больше значение индуктивности.

На рис. 2.23 представлены частотные характеристики добротности колец с различной толщиной металлизации, изменяющейся от 10 до 100 мкм.

Как видно из рис. 2.23 добротность таких колец достигает очень больших значений, лежащих в диапазоне от 100 до 200. Это на один-два порядка больше, чем достигаемые значения в современных планарных технологиях при формировании индуктивности с большим числом витков. Максимальные значения добротности индуктивности достигаются на большей толщине металлизации.

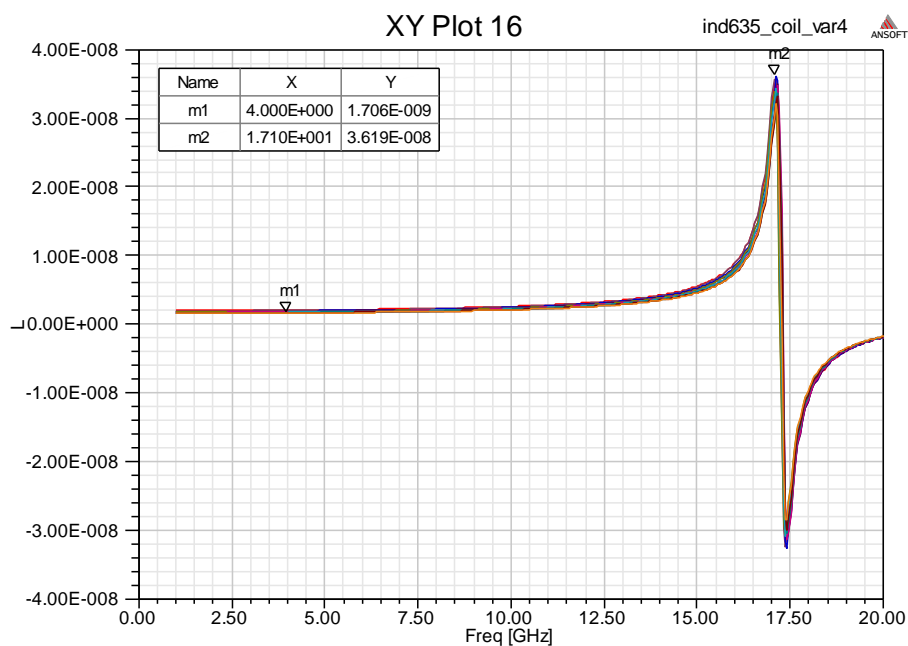


Рис. 2.21. Частотная зависимость индуктивности кольца с толщиной металлизации 80 мкм

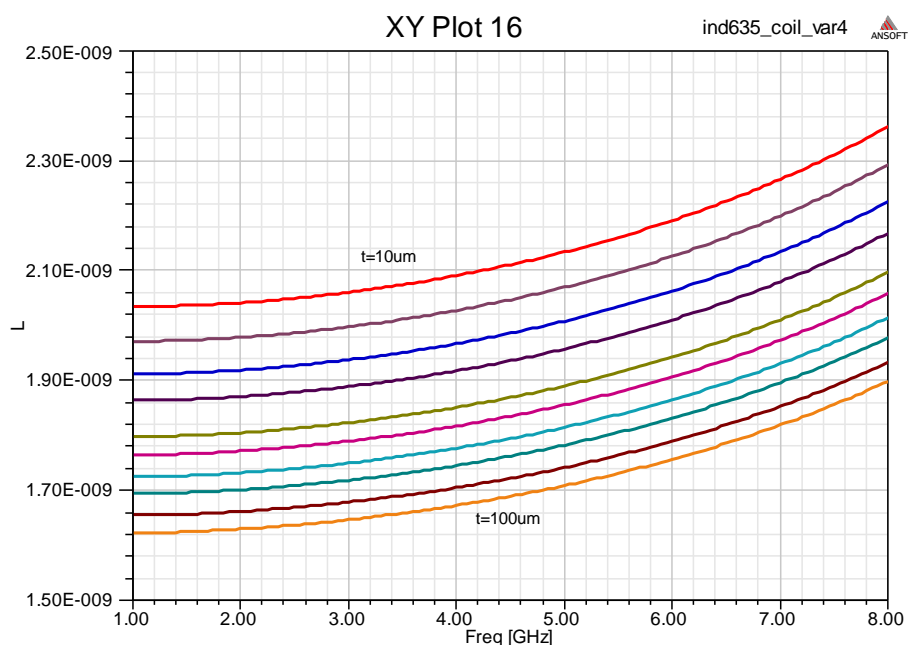


Рис. 2.22. Зависимость индуктивности кольца от толщины металлизации

Добротность у всех индуктивностей достигает максимума на частотах около 7,5 ГГц, а затем уменьшается практически до нуля. Понижение добротности к нулю на частотах около 17 ГГц обусловлено переходом индуктивности с положительных значений в отрицательную область.

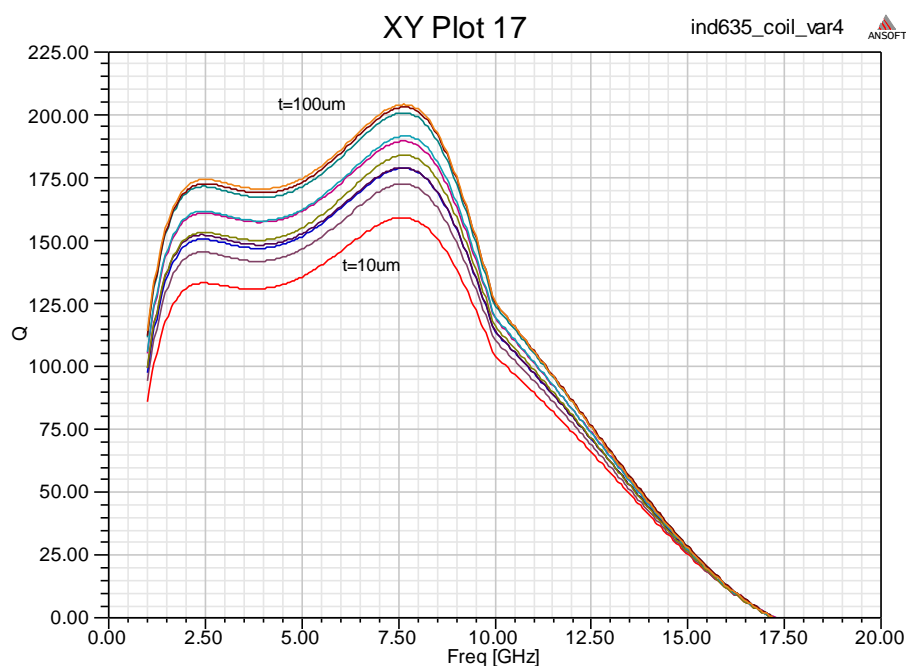


Рис. 2.23. Частотная зависимость добротности токового кольца

Частотные изменения индуктивности в программе моделирования обусловлены тем, что на частотах выше 1 ГГц уже начинает проявлять себя скин-эффект. Он приводит к уменьшению площади поперечного сечения токового шнура из-за его выталкивания на поверхность.

Для проведения сравнения мы добавим вычисление объёмной плотности индуктивности планарного токового кольца, пользуясь соотношением

$$\rho_L = L / [\pi(R_2^2 - R_1^2)h]. \quad (2.130)$$

В таблице 2.5 сведены основные параметры индуктивности исследуемого кольца, которые взяты из различных источников: результаты, полученные в HFSS Ansoft, результаты вычислений по формулам отчёта и данные экспериментов, приведенные в работе [45].

Как видно из таблицы 2.5, значения магнитостатической индуктивности кольца, следующие из аналитических расчётов для принятых выше геометрических размеров, дают значение индуктивности в 8 раз меньше, чем значения, полученные HFSS моделированием на частоте 4 ГГц при толщине металлизации 10 мкм. В то же время, это значение оказывается всего в 2,8 раза меньше, чем значение индуктивности, полученное в экспериментах на 100 МГц.

Таблица 2.5

Сравнительные значения индуктивности конкурирующих методов

Наименование	Частота	Индуктивность	Толщина металлизации	Объёмная плотность индуктивности

HFSS-Ansoft	4 ГГц	2,08 нГн	10 мкм	285 Гн/м <sup>3</sup>
Аналитика	100 МГц	0,26 нГн	10 мкм	35,6 Гн/м <sup>3</sup>
Эксперимент	100 МГц	0,72 нГн	5 мкм	147 Гн/м <sup>3</sup>

HFSS – моделирование даёт значение объёмной плотности индуктивности выше экспериментального в 2 раза и выше аналитических расчётов в 8 раз.

Сравнительное отличие в разы, а не на порядки указывает на приемлемую степень адекватности и достоверности конкурирующих между собой методов исследования многогранных свойств интегральной индуктивности.

### 2.1.6 Выводы по разделу 2.1

- Факт отсутствия особенности поля на поверхности проводника позволяет обрывать распределение магнитного поля на конечном расстоянии от геометрического проводника и считать параметр  $\delta$  конечной радиальной шириной металлического покрытия токового кольца.
- Полученное соотношение для потока дает возможность рассчитать зависимость потоковой индуктивности от отношения радиальной ширины кольца  $\delta$  к радиусу витка  $R$ .
- Исследованы аналитически случаи малой и большой, по сравнению с масштабом, индуктивности, которые реализуются при большой и малой радиальной ширине кольца.
- Реальные величины индуктивности для кольца с радиусом  $R_1 = 0,5$  мм сдвигаются к малым значениям по сравнению со случаем  $R_2 = 0,5$  см и лежит в диапазоне от 0,0314 пГн до 0,845 нГн при изменении радиальной ширины кольца в пределах от 0,495 мм до 5 мкм.
- Теория и эксперимент указывают на то, что с ростом радиальной ширины напыления индуктивность кольца уменьшается, что согласуется с физическим объяснением.
- Точное сравнение расчетных результатов с экспериментальными показывает, что теоретические результаты занижены по сравнению с экспериментом.
- Высказано предположение, что такое различие может быть связано с тремя причинами: невозможностью вычисления токовой части индуктивности кольца, наличием неучтенной погонной индуктивности проводников, подводящих переменный электрический ток к кольцу и возможное увеличение экспериментальных значений индуктивности за счёт скин-эффекта.

- Добротность потоковой части индуктивности оказывается линейной функцией частоты. Коэффициент линейности зависит от удельного сопротивления используемого проводника. Для одинаковых колец он больше, чем меньше удельное сопротивление применяемого проводника.
- Диапазон частот, для которого можно рассчитывать индуктивность планарного токового кольца относится к низкочастотному диапазону, в котором разность фаз между током и потоком остаётся равной нулю. Это диапазон частот, который не превышает значение частоты в 100 МГц.
- Значения магнитостатической индукции кольца, следующие из аналитических расчётов, дают значение индуктивности в 8 раз меньше, чем значения, полученные HFSS-моделированием на частоте 4 ГГц при толщине металлизации 10 мкм. В то же время, это значение оказывается всего в 2,8 раза меньше, чем значение индуктивности, полученное в экспериментах на 100 МГц.
- HFSS – моделирование даёт значение объёмной плотности индуктивности выше экспериментального в 2 раза и выше аналитических расчётов в 8 раз.
- Сравнительное отличие в разы, а не на порядки указывает на приемлемую степень адекватности и достоверности конкурирующих между собой методов исследования многогранных свойств интегральной индуктивности.

## 2.2. О расчёте коэффициента увеличения планарной индуктивности 2D-спиралей Архимеда и обобщённых спиралей

В разделе 2.2. предлагается оригинальная методика расчётов спиральной индуктивности  $L$  высокой симметрии, исходящая из физического определения этого понятия как коэффициента пропорциональности между потоком  $\Phi$  и током  $i$ , создающим этот поток

$$\Phi = Li. \quad (2.128)$$

В связи с этим, предлагаемая последовательность расчёта индуктивности плоской токовой спирали заключается в следующем: 1) по заданному значению тока в кольце радиусом  $R$  рассчитывается значение магнитного поля  $B^*$  в центре кольца; 2) помещаем в это кольцо спираль с заданным законом зависимости  $r = r(\varphi)$  в полярных координатах, который ограничен по числу витков  $N$  двумя переменными: начальным значением угла  $\varphi_1$  и радиусом  $r_1$  и конечным значением угла  $\varphi_2$  и радиусом  $R$ , совпадающим с радиусом кольца; 3) по закону Био-Савара-Лапласа рассчитывается новое значение индукции магнитного поля  $B$ , которое создаёт планарная спираль в центре кольца; 4) вычисляется коэффициент

увеличения индукции магнитного поля  $\alpha$  и находится связь значения индуктивности, формируемого спиралью, с коэффициентом увеличения  $\alpha$ .

### 2.2.1. Физико-математическая модель расчёта

Одним из мощных методов расчета магнитостатических полей по праву считается закон Био- Савара- Лапласа [11]. Он позволяет выяснить физические закономерности распределения магнитных полей, создаваемых простейшими токовыми системами. В современных математических обозначениях он записывается в виде:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3}, \quad (2.129)$$

где  $d\mathbf{B}$  — элементарная магнитная индукция поля, создаваемая элементом проводника с током  $I d\mathbf{l}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная;  $d\mathbf{l}$  — элементарный вектор длины, совпадающий по направлению с током (элемент проводника);  $I$  — сила тока;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный от элемента проводника к точке наблюдения  $A$ , в которой определяется магнитная индукция.

### 2.2.2. Магнитное поле тока и индуктивность спирали Архимеда

Расчёт магнитного поля в центре спирали будем проводить, используя закон (2.2). На рис. 2.24 представлено расположение векторов задачи в полярной системе координат. Направление векторов отмечено стрелками. Жирная кривая выделяет фрагмент спирали, которая начинается в точке  $(0,0)$ . Вектор  $d\vec{l}$  направлен по касательной к выделенной кривой и совпадает с направлением тока. Он имеет две компоненты:  $d\vec{l}_{||}$  и  $d\vec{l}_{\perp}$ . Вектор  $d\vec{l}$  составляет угол  $\alpha$  с направлением радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Вектор  $d\vec{l}$  составляет угол  $\alpha_1$  с направлением другого вектора  $\mathbf{r}_1$ . Векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  — противоположны друг другу, но равны по модулю.

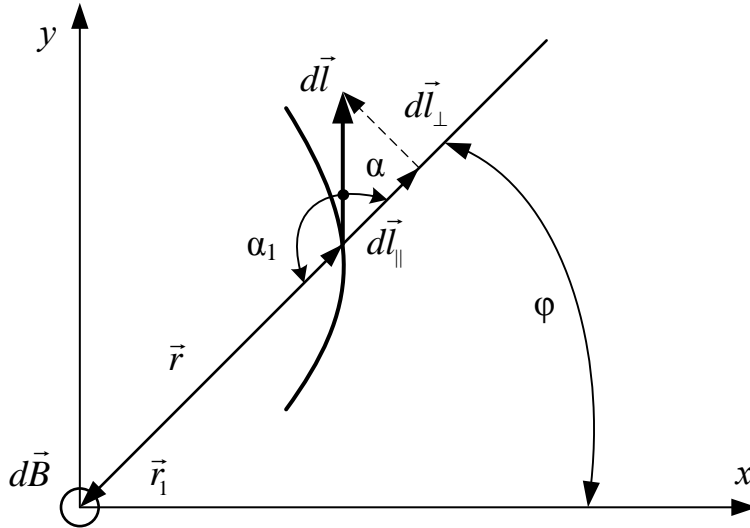


Рис. 2.24. Направления основных векторов задачи

На плоскости, представленной на рис. 2.24, закон (2.2) можно записать в скалярном виде

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha_1}{4\pi r_1^2}. \quad (2.130)$$

Затем в (2.130) следует замена

$$dl \sin \alpha_1 = dl \sin \alpha = r d\varphi. \quad (2.131)$$

Она указывает на то, что поперечная составляющая вектора  $d\vec{l}$  вносит вклад в формирование индукции магнитного поля в начале координат, а продольная составляющая – не вносит. Тогда формула для расчёта элементарной индукции магнитного поля в центре спирали имеет вид

$$dB = \frac{\mu_0 I d\varphi}{4\pi r(\varphi)}. \quad (2.132)$$

Из (2.132) следует общая формула для расчёта индукции в начале координат для любых спиралей, имеющих закон  $r = r(\varphi)$

$$B = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mu_0 I d\varphi}{4\pi r(\varphi)}. \quad (2.133)$$

Рассчитаем коэффициент увеличения индукции в центре спирали Архимеда. Уравнение спирали Архимеда имеет вид

$$r = a\varphi, \quad (2.134)$$

где  $a$  – постоянная. Как известно, спираль Архимеда описывает движение светящейся точки, которая имеет две компоненты скорости – постоянную радиальную скорость движения  $v_r$  и постоянную угловую скорость  $\omega$ . Постоянная  $a$  связана с этими переменными соотношением  $a = v_r / \omega$ .



Предположим, что начальное положение спирали Архимеда находится в точке  $r=r_1$  и имеет угол  $\varphi_1=\pi/2$ . Тогда начальный и конечный радиусы и начальный и конечный угол спирали связаны соотношением

$$\frac{R}{r_1} = 1 + 4N = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \quad (2.135)$$

где  $N$  – целое количество витков спирали.

Интегрируя в этих пределах выражение (2.133), получим выражение для коэффициента увеличения индукции поля  $\alpha$

$$\frac{B}{B_*} = \alpha = (1 + 4N) \ln(1 + 4N) / 4, \quad (2.136)$$

где  $B_* = \mu_0 I / (2R)$  (2.137)

- индукция, создаваемая в центре кольца тем же током.

В таблице 2.6 представлена зависимость коэффициента увеличения индукции и отношения конечного радиуса к начальному радиусу от числа витков спирали Архимеда.

Таблица 2.6

Зависимость коэффициента увеличения индукции  
от числа витков спирали Архимеда

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$\alpha$	4,94	8,33	12,04	15,98	20,12	24,41	28,85	33,40	38,06	89
$R/r_1$	9	13	17	21	25	29	33	37	41	81

Из таблицы 2.6 видно, что увеличение числа витков от 2 до 20 позволяет увеличить индукцию магнитного поля в центре спирали Архимеда от 5 до 90 раз.

### 2.2.3. Магнитное поле тока и индуктивность обобщённой спирали

Для обобщённых спиралей вида

$$r = a\varphi^n, \quad (2.138)$$

где  $n$  – любое число кроме единицы, возможны следующие классы спиралей. Класс спиралей отрицательных порядков  $n < 0$  (класс закручивающихся спиралей), класс дробных положительных порядков ( $0 < n < 1$ ) и класс спиралей положительных порядков ( $1 < n < \infty$ ). Последние два класса относятся к классу раскручивающихся спиралей.

Подставляя (2.138) в интеграл (2.133), получим для коэффициента увеличения индукции поля

$$\frac{B}{B_*} = \alpha = \frac{(1+4N)^n}{4(1-n)} \left[ (1+4N)^{1-n} - 1 \right]. \quad (2.139)$$

Связь начальных и конечных переменных получается в виде

$$\frac{r_2}{r_1} = \left( \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right)^n = (1+4\pi N)^n. \quad (2.140)$$

В таблице 2.7 представлены зависимости коэффициента увеличения индукции в центре обобщённой спирали для разных индексов  $n$ . Первые две строки рассчитаны для  $n=1/2$ , Вторые две строки рассчитаны для  $n=3/2$ , а последние две строки рассчитаны для  $n=2$ .

Таблица 2.7

Зависимость коэффициента увеличения индукции  
от числа витков обобщённых спиралей для разных  $n$

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$\alpha(n_1)$	3,0	4,7	6,5	8,2	10,0	11,8	13,6	15,5	17,3	36,0
$R/r_1$	3,0	3,6	4,1	4,6	5,0	5,4	5,7	6,1	9,0	27,0
$\alpha(n_2)$	9,0	16,9	26,5	37,6	50,0	63,6	78,3	94,0	110	324
$R/r_1$	27	46,9	70,0	96,2	125	156	190	225	262	729
$\alpha(n_3)$	18	39	68	105	150	203	264	333	410	1620
$R/r_1$	81	169	289	441	625	841	1089	1369	1681	6561

Из табл. 2.7 видно, что наиболее перспективными являются раскручивающиеся спирали с показателем  $n>1$ . Для рассчитанных значений полученные коэффициенты увеличения индукции значительно больше, чем у спирали Архимеда. Но с другой стороны, эти коэффициенты можно получить только путём увеличения площади, занимаемой обобщённой спиралью.

Считая, что среднее значение потоков индукции в кольце и спирали можно рассчитывать по значениям индукции в центре, получим оценочное соотношение для коэффициента увеличения индуктивности, который совпадает с коэффициентом увеличения индукции

$$L = \alpha L_*, \quad (2.141)$$

где

$$L_* = \mu_0 \pi R / 2 \quad (2.142)$$

- масштаб индуктивности исследуемой системы.

Проведём оценку для  $N=10$  витков спиральной индуктивности, начальный радиус, которой 10 мкм. Для спирали Архимеда конечный радиус 410 мкм (см. табл. 2.6), масштаб индуктивности 0,81 нГн, а увеличение индуктивности происходит почти в 40 раз до значений 30, 8 нГн. Для спирали с  $n=2$  получим конечный радиус 16,8 мм, (см. табл. 2.7),

масштаб индуктивности 33,2 нГн, а увеличение индуктивности происходит почти в 1680 раз до значений 55, 8 мкГн.

По разделу 2 опубликованы работы [46 – 48].

### **2.3.Выводы по разделу 2.2**

- Предложен оценочный метод расчёта планарной индуктивности спирального вида.
- Метод базируется на законе Био-Савара-Лапласа, который позволяет в полярных координатах рассчитывать индукцию в центре для любых видов спиралей.
- Проведена сравнительная оценка значений спиральной индуктивности для спиралей Архимеда и обобщённых спиралей.
- Показано, что применение спиралей с количеством витков  $N=10$  может увеличивать значение их индуктивности, по сравнению с кольцевой, от 40 до 1500 раз.
- Как видно из обзора публикаций, приведённых в разделе 1, в печати отсутствуют экспериментальные работы с планарными индуктивностями спирального вида в низкочастотной области, там, где не наблюдается Current Crowding Effects. Это не дало нам возможности сравнить полученные теоретические результаты с экспериментом.

## ГЛАВА 3

### РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ РАСЧЁТА ПОГОННЫХ 3D – ИНДУКТИВНОСТЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ С АКСИАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ТОКОВ И МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ ИХ ЗНАЧЕНИЕМ

Сохраняя идеологию методики расчёта, предложенной в разделе 2, рассчитаем погонную индуктивность цилиндрических проводников с аксиальной плотностью тока.

#### 3.1. Магнитные и индуктивные свойства полого и круглого цилиндрических проводников

##### 3.1.1. Распределение магнитных полей бесконечно длинного круглого проводника с током

Расчёт будем проводить исходя из фундаментального уравнения магнитостатики, записанного для векторного потенциала

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.1)$$

с калибровкой

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (3.2)$$

Связь индукции магнитного поля с векторным потенциалом находится из соотношения

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.3)$$

Запишем (3.1) в цилиндрических координатах с учётом того, что плотность тока имеет только одну аксиальную компоненту, направленную по оси  $z$ :  $\mathbf{j} = (0, 0, j_z)$ . Она порождает поле векторного потенциала, имеющего также только одну компоненту  $\mathbf{A} = (0, 0, A_z)$

$$\Delta A_z = -\mu_0 j_z. \quad (3.4)$$

Оператор Лапласа для декартовой компоненты векторного потенциала, зависящей от радиуса, имеет вид

$$\Delta A_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_z}{dr} \right) = -\mu_0 j_z. \quad (3.5)$$

Предположим, что в (3.5) плотность тока однородна по поперечному сечению  $j_z = j_0 = \text{const}$ , а проводник имеет конечный радиус  $R$ .

Из (3) следует, что такое поле векторного потенциала порождает индукцию магнитного поля с одной компонентой

$$B_\varphi = -\frac{dA_z}{dr}. \quad (3.6)$$

Цилиндрическая поверхность проводника, имеющего радиус  $R$ , делит всё пространство, в котором возбуждено статическое магнитное поле, на две области: внутреннюю область ( $0 \leq r \leq R$ ), в которой есть ток; и внешнюю область ( $r > R$ ), где тока нет. Поставленная задача очень похожа на задачу электростатики для уравнения Пуассона (внутренняя краевая задача).

Тогда для внутренней области (потенциал отмечен индексом «1») уравнение (3.5) имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\mu_0 j_0, \quad (3.7)$$

а во внешней области (потенциал отмечен индексом «2») –

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_2}{dr} \right) = 0. \quad (3.8)$$

В уравнении (3.5) перейдём к новой функции  $y(\xi) = A_z / A_*$ , где  $\xi = r / R$ , а

$$A_* = \mu_0 j_0 R^2 / 4 \quad (3.9)$$

- масштаб векторного потенциала.

Решение для внутренней области (3.7) имеет вид

$$y_1 = -\xi^2 + c_1 \ln \xi + c_2, \quad (3.10)$$

а для внешней области (8)

$$y_2 = c_3 \ln \xi + c_4, \quad (3.11)$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – произвольные постоянные. В решении (3.10) убираем особенность в нуле и выбираем нуль потенциала на оси системы  $y_1(0) = 0$ . В этом заключается принципиальное отличие поставленной краевой магнитостатической задачи от электростатической. С учётом этого, получаем  $c_1 = c_2 = 0$ .

Постоянные  $c_3$  и  $c_4$  определяем из условия непрерывности функции и её производной на границе областей  $\xi = 1, c_3 = -2, c_4 = -1$ . Окончательно решения (3.10) и (3.11) примут вид

$$\begin{aligned} y_1 &= -\xi^2, \text{ в обл. } 0 \leq \xi \leq 1. \\ y_2 &= -\xi^2, \text{ в обл. } \xi \geq 1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Радиальное распределение индукции находим из (3.6)

$$B_\varphi = -B_* \frac{dy}{d\xi}, \quad (3.13)$$

где  $B_* = A_* / R$  - масштаб индукции поля. Индукция линейно растёт во внутренней области

$$B_\varphi = 2B_* \xi, \quad (3.14)$$

а во внешней области убывает по закону

$$B_\varphi = 2B_* / \xi. \quad (3.15)$$

### 3.1.2. Индуктивность сплошного цилиндрического проводника с током. Параметр обрезания поля

Наличие двух областей, в которых магнитное поле распределено по разным законам указывает на то, что индуктивность прямолинейного круглого тока складывается из двух частей. Первая часть соответствует индуктивности, которая связана с потоком магнитного поля во внутренней области. В ней силовые линии магнитного поля поперечны линиям плотности тока. В связи с этим её удобно назвать токовой частью индуктивности.

Вторая часть соответствует индуктивности, которая связана с магнитным потоком, находящимся во внешней области. Её удобно назвать потоковой частью индуктивности.

Если цилиндрический проводник разрезать по оси (см. рис. 3.1), то видна область, по которой следует интегрировать при вычислении потока во внутренней области. На рис. 3.1 крестиками указано направление магнитных силовых линий при условии, что плотность тока направлена вдоль оси  $z$ . Ось проводника обозначена  $OO'$ , а элементарная площадка интегрирования  $dS$  – заштрихована.



Рис. 3.1. Площадка интегрирования при вычислении потока во внутренней области

Вычисляя внутренний поток, получим

$$\Phi_l = \int_S \mathbf{B} dS = l \int_0^R B(r) dr = \Phi_*, \quad (3.16)$$

где  $\Phi_* = A_* l$  – масштаб потока. Учитывая соотношение (3.9) и связь

$i = j_0 \pi R^2$ , получим для погонной токовой части индуктивности выражение

$$\frac{L_c}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} = \text{const} = 1 \text{ нГн/см}. \quad (3.17)$$

Как видно из (3.17), она не зависит от радиуса проводника и с точностью до константы совпадает с магнитной постоянной.

Проводя аналогичные вычисления во внешней области, получим погонную потоковую индуктивность

$$\frac{L_2}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(r_0 / R). \quad (3.18)$$

При вычислении (3.18) введён радиус обрезания магнитного поля  $r_0 > R$ . Из (3.18) видно, что потоковая погонная индуктивность также не зависит от радиуса проводника, но имеет логарифмическую расходимость при  $r_0 / R \rightarrow \infty$ .

Полная погонная индуктивность, выраженная через токовую индуктивность, имеет вид

$$\frac{L_f}{l} = \frac{L_c}{l} + \frac{L_2}{l} = \frac{L_c}{l} [1 + 2 \ln(r_0 / R)] \quad (3.19)$$

и также имеет логарифмическую расходимость при  $r_0 / R \rightarrow \infty$ .

Зависимость полной погонной индуктивности цилиндрического проводника  $L_f / L_c$  от приведённого радиуса обрезания поля  $\xi_0 = r_0 / R$  представлена на рис. 3.2. Из рис. 3.2 видно, что при изменении параметра  $\xi_0$  в интервале от 5 до 100 приведённая полная индуктивность изменяется в пределах  $4,22 \leq L_f / L_s \leq 10,2$ . Это говорит о том, что полная погонная индуктивность может в несколько раз превышать токовую индуктивность того же проводника.

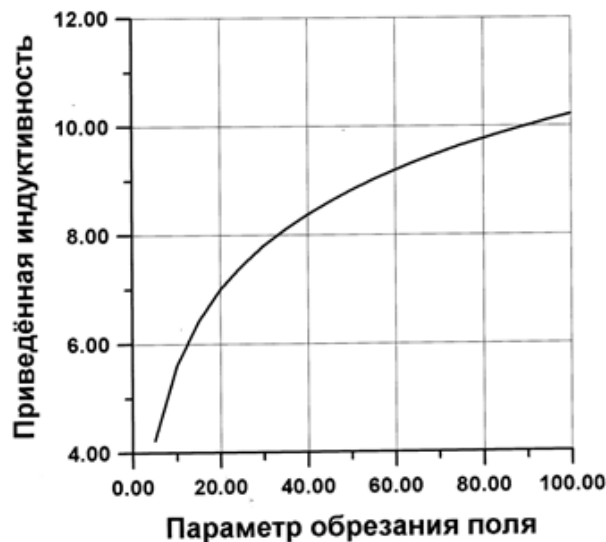


Рис. 3.2. Зависимость приведённой индуктивности от параметра обрезания поля

Причина, по которой проявляется логарифмическая расходимость полной индуктивности, прозрачна. Решение поставленной задачи удаётся найти для бесконечно длинного проводника (отсутствует зависимость

полей от переменной  $z$ ). Все реальные проводники, используемые в планарных технологиях, имеют конечную длину. Поэтому точное значение параметра обрезания поля и его зависимость от радиуса и длины проводника ждёт своего экспериментального определения.

### 3.1.3. Распределение магнитных полей бесконечно длинного трубчатого проводника с током

Для нахождения распределения магнитных полей трубчатого проводника воспользуемся уравнением (3.5). На рис. 3.3 представлена геометрия внешней краевой задачи.

Предположим, что в (3.5) плотность тока однородна по поперечному сечению  $j_z = j_0 = \text{const}$  в проводящей области II, ограниченной неравенством  $r_1 \leq r \leq R$ . На рис. 3.3  $r_1$  – радиус полости,  $R$  – внешний радиус проводящей области, а направление вектора плотности тока обозначено крестиком.

Тогда для областей I и III, в которых нет тока, уравнение (3.5) приводится к виду

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_{I,3}}{dr} \right) = 0, \quad (3.20)$$

а в области II, где течёт ток

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_2}{dr} \right) = -\mu_0 j_0. \quad (3.21)$$

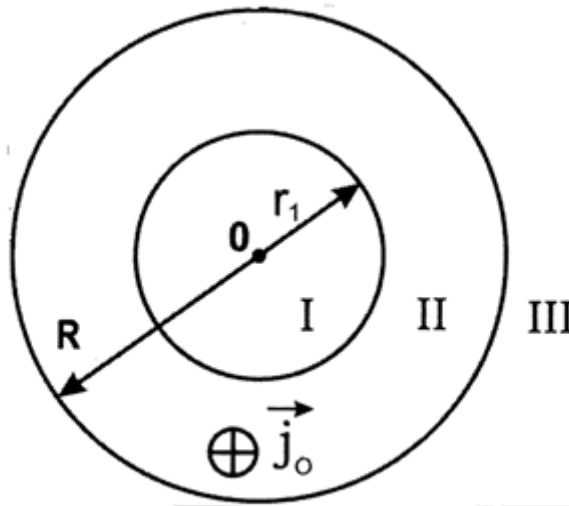


Рис. 3.3. Геометрические параметры поперечного сечения трубчатого проводника

Сохраняя те же значения масштабов векторного потенциала  $A_*$  и индукции магнитного поля  $B_*$ , выпишем решение для области I

$$y_I = c_1 \ln \xi + c_2, \quad (3.22)$$



для области II

$$y_2 = -\xi^2 + c_3 \ln \xi + c_4, \quad (3.23)$$

и для области III

$$y_3 = c_5 \ln \xi + c_6. \quad (3.24)$$

В (3.22) – (3.24)  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  – произвольные постоянные. В решении (3.22) убираем особенность на оси и задаём нулевое значение потенциала  $y_1(0) = 0$ .

С учетом этого, получаем  $c_1 = c_2 = 0$ . Постоянные  $c_3$  и  $c_4$  определяем из условия непрерывности функции и её производной на первой границе  $\xi = \xi_1$ :  $c_3 = 2\xi_1^2$ ,  $c_4 = \xi_1^2 - 2\xi_1^2 \ln \xi_1$ . Постоянные  $c_5$  и  $c_6$  определяем из подобных условий на границе  $\xi = 1$ :  $c_5 = 2\xi_1^2 - 2$ ,  $c_6 = \xi_1^2 - 2\xi_1^2 \ln \xi_1 - 1$ .

Радиальные распределения индукции находим из решений, полученных для потенциала (3.22) – (3.24) с учётом (3.13)

$$\text{в области I:} \quad B_1 / B_* = 0, \quad (3.25)$$

$$\text{в области II:} \quad B_2 / B_* = 2\left(\xi - \xi_1^2 / \xi\right), \quad (3.26)$$

$$\text{в области III:} \quad B_3 / B_* = 2\left(1 - \xi_1^2\right) / \xi. \quad (3.27)$$

Графики радиального распределения приведённой индукции  $B/B_*$  от приведённой радиальной координаты  $\xi$  для трёх значений приведённого радиуса полости  $\xi_1 = 0,2$  (кривая 1);  $\xi_2 = 0,5$  (кривая 2);  $\xi_3 = 0,75$  (кривая 3) представлены на рис. 3.4.

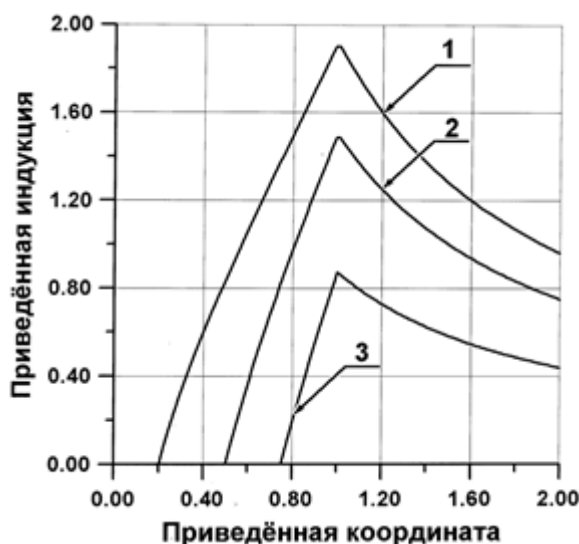


Рис. 3.4. Радиальное распределение приведённой индукции магнитного поля от приведённой координаты

Из рис. 3.4 видно, что магнитное поле внутри полости отсутствует, а производная индукции магнитного поля при переходе через внешнюю границу раздела испытывает скачок от значения  $2(1 + \xi_1^2)$  до значения  $-2(1 - \xi_1^2)$ .

### 3.1.4. Индуктивность трубчатого проводника. Параметр обрезания поля

Наличие трёх областей, в которых магнитное поле распределено по разным законам, указывает на то, что индуктивность прямолинейного трубчатого тока также складывается из двух частей. Первая часть индуктивности, определяемая областью II, является токовой. Вторая часть индуктивности, связанная с магнитным потоком во внешней области, — потоковая.

Вычисляя потоки в соответствующих областях, получим

$$\text{в области II:} \quad \Phi_2 = \Phi_* (1 - \xi_l^2 + 2\xi_l^2 \ln \xi_l), \quad (3.28)$$

$$\text{в области III:} \quad \Phi_3 = 2\Phi_* (1 - \xi_l^2) \ln \xi_0. \quad (3.29)$$

В (3.29) по аналогии с (3.18) введено обозначение  $\xi_0 = r_0 / R > 1$  — приведённый радиус обрезания магнитного поля в области III.

Вычисляем соответствующие потокам погонные индуктивности

$$\frac{L_2}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(1 - \xi_l^2 + 2\xi_l^2 \ln \xi_l)}{(1 - \xi_l^2)} - \quad (3.30)$$

токовая индуктивность

$$\frac{L_3}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \xi_0 - \quad (3.31)$$

потоковая индуктивность.

Полная индуктивность единицы длины трубчатого проводника имеет вид

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{(1 - \xi_l^2 + 2\xi_l^2 \ln \xi_l)}{(1 - \xi_l^2)} + 2 \ln \xi_0 \right]. \quad (3.32)$$

Графики зависимости приведённой погонной токовой индуктивности (3.30) трубчатого проводника  $\frac{4\pi L_2}{\mu_0 l}$  от приведённого радиуса полости  $\xi_l$

приведены на рис. 3.5. Из графика видно, что при малых значениях приведённого радиуса полости  $\xi_l$  её значение совпадает со значением (3.17), полученным для круглого проводника.

Поскольку функция (3.30) не может быть разложена в ряд по малому параметру  $\xi_l$ , то для этой области малых значений занесём значения приведённой индуктивности с точностью до пятого знака после запятой в табл. 3.1.

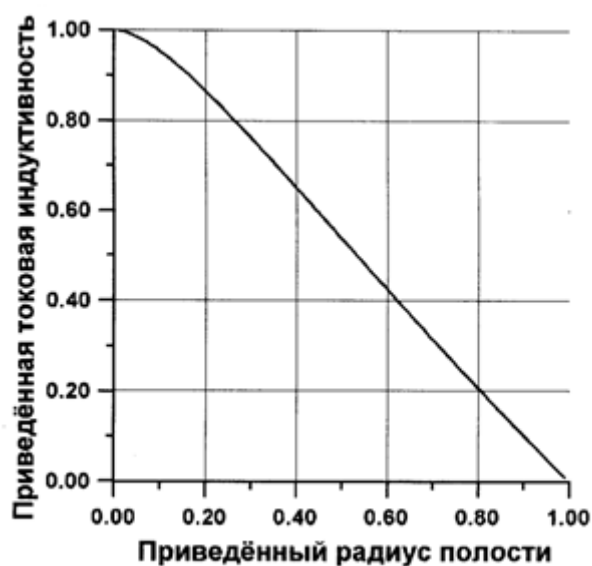


Рис. 3.5. Зависимость погонной токовой индуктивности от радиуса полости

Таблица 3.1

Численное моделирование зависимости приведённой индуктивности от малого приведённого параметра полости

$\xi_1$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$L_2 / L_c$	0,99908	0,99687	0,99368	0,98968	0,98498
$\xi_1$	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$L_2 / L_c$	0,97967	0,97381	0,96746	0,96067	0,95348

Введём параметр толщины стенки трубчатого проводника

$$\delta = R - r_l. \quad (3.33)$$

Для проводника с тонкой стенкой (реализуются малые значения приведённой толщины трубки  $t = \delta / R \ll 1$ ) значения индуктивности можно вычислять из ряда по  $t$ , который быстро сходится:

$$\frac{4\pi L_2}{\mu_0 l} \approx t + t^2 / 6 - t^4 / 30 + O(t^5). \quad (3.34)$$

Из соотношения (3.34) видно, что значение токовой индуктивности становится линейной функцией приведённой толщины трубки при выполнении условия  $t = \delta / R \ll 1$ . Отсюда следует: чем меньше толщина трубчатого проводника, тем меньше значение его погонной токовой индуктивности

$$L_2 \approx L_c \delta / R. \quad (3.35)$$

Как следует из (3.32), полная погонная индуктивность трубчатого проводника также имеет логарифмическую расходимость по параметру обрезания поля  $\xi_0 = r_0 / R \rightarrow \infty$ . И в этом случае, точное значение

параметра обрезания и его зависимость от радиуса и длины проводника ждёт своего экспериментального определения.

### 3.1.5. Добротность индуктивности цилиндрического проводника

Теоретическое значение индуктивности (3.32) следует считать индуктивностью на постоянном токе. Она остаётся неизменной для переменного тока в той области частот, когда фазовый сдвиг между током и потоком равен нулю. Для этой области частот такая индуктивность не зависит от частоты.

Рассчитаем зависимость добротности индуктивности от частоты и определим интервал частот, в котором она имеет приемлемые значения

$$Q = \omega L / R_0, \quad (3.36)$$

$$R_0 = \rho l / (\pi R^2 - \pi r_l^2) \quad (3.37)$$

где омическое сопротивление участка трубчатого проводника длиной  $l$ ,  $\rho$  – удельное сопротивление проводника. Подставляя (3.37) в (3.36), получим

$$Q = \frac{\omega}{\Omega_*} [1 - \xi_l^2 + 2\xi_l^2 \ln \xi_l + 2(1 - \xi_l^2) \ln \xi_0], \quad (3.38)$$

$$\text{где} \quad \Omega_* = \frac{4\rho}{\mu_0 R^2} \quad (3.39)$$

– масштаб характеристической частоты.

Как видно из (3.38), добротность полной индуктивности цилиндрического проводника не зависит от длины проводника, но зависит от частоты, приведённого радиуса полости и имеет логарифмическую расходимость по параметру обрезания поля при  $\xi_0 = r_0 / R \rightarrow \infty$ .

Нижняя характеристическая частота следует из (3.38) при  $Q=1$

$$\omega_l = \frac{\Omega_*}{1 - \xi_l^2 + 2\xi_l^2 \ln \xi_l + 2(1 - \xi_l^2) \ln \xi_0}. \quad (3.40)$$

Добротность токовой индуктивности также зависит от частоты и приведённого радиуса полости  $\xi_l$ :

$$Q_c = \frac{\omega}{\Omega_*} (1 - \xi_l^2 + 2\xi_l^2 \ln \xi_l). \quad (3.41)$$

Нижняя характеристическая частота токовой индуктивности имеет вид

$$\omega_{lc} = \frac{\Omega_*}{1 - \xi_l^2 + 2\xi_l^2 \ln \xi_l}. \quad (3.42)$$

Как видно из (3.42), она, для одинаковых трубчатых проводников, будет тем выше, чем больше её удельное сопротивление.

Оценим добротность и нижнюю характеристическую частоту токовой индуктивности для круглого полого цилиндрического проводника

со следующими параметрами: внешний радиус 5 мкм, удельное сопротивление 16 нОм·м (медь), радиус полости 1 мкм. Из оценки следует, что добротность токовой индуктивности из меди будет больше единицы для частот  $\nu = \omega / 2\pi > \nu_{lc} = 0,38$  ГГц, что по порядку величины сходится со значением нижней характеристической частоты для медного кольца. Для полого проводника с  $\xi_1=0,5$  значение нижней характеристической частоты увеличивается в 2 раза.

Оценим границу применимости полученных результатов на высоких частотах. Её можно получить, исследуя времена установления неоднородных магнитных полей в трубчатом проводнике. Будем считать, что эти времена связаны со скоростью передачи электромагнитных взаимодействий – скоростью света. Тогда характерное время установления  $\tau = R/c$ , где  $R$  – внешний радиус проводника, даёт значение верхней характеристической частоты  $\nu_{h*} = 1/\tau = c/R$ . Вычисленное её значение для проводника радиусом 5 мкм получается  $60 \cdot 10^{12}$  гц. На современном этапе развития интегральных технологий эти частоты пока не достигнуты.

### 3.1.6. Выводы по разделу 3.1

- Предложен аналитический метод расчёта статических магнитных полей круглого и полого цилиндрических проводников с аксиальной плотностью тока.
- Радиальное распределение магнитного поля внутри проводника с током таково, что его индукция изменяется от нулевых и достигает конечных значений на внешней поверхности проводника.
- Радиальное распределение магнитного поля вне проводника с током таково, что оно всегда убывает при перемещении точки наблюдения от поверхности проводника наружу.
- Производная индукции магнитного поля при переходе через внешнюю границу раздела испытывает скачок.
- Теория показывает, что погонная индуктивность цилиндрического проводника состоит из двух составляющих: токовой погонной индуктивности и потоковой.
- Погонная токовая индуктивность трубчатого проводника становится линейной функцией приведённой толщины проводника при выполнении условия  $t = \delta / R \ll 1$ .
- При малых значениях приведённого радиуса полости погонная токовая индуктивность совпадает со значением 1 нГн/см.
- Погонная потоковая индуктивность любого цилиндрического проводника имеет логарифмическую расходимость при параметре обрезания поля  $\xi_0 = r_0 / R \rightarrow \infty$ .

- Точное значение параметра обрезания поля и его зависимость от радиуса и длины круглого и трубчатого проводника ожидает своего экспериментального определения.
- Добротность токовой индуктивности цилиндрического проводника не зависит от длины, а зависит от частоты и приведённого радиуса полости.
- Добротность токовой индуктивности имеет приемлемые значения только в некотором частотном диапазоне, ограниченном характеристическими частотами системы.
- С ростом приведённого радиуса полости трубчатого проводника нижняя характеристическая частота увеличивается.
- Увеличение погонной индуктивности цилиндрического проводника при увеличении параметра обрезания поля необходимо учитывать при измерении индуктивности кольцевого тока. Как показывают вычисления, для определённых значений параметра кольца она может быть и значительно меньше индуктивности длинных подводящих проводов.

## 3.2. О методе управления погонной индуктивностью коаксиального кабеля с аксиальной плотностью токов

### 3.2.1. Физико-математическая модель расчёта

Расчёт будем проводить исходя из фундаментального уравнения магнитостатики, записанного для векторного потенциала

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.43)$$

с калибровкой

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (3.44)$$

Связь индукции магнитного поля с векторным потенциалом находится из соотношения

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.45)$$

Запишем (3.43) в цилиндрических координатах с учётом того, что плотности тока в коаксиальном кабеле имеют только одну аксиальную компоненту, направленную по оси  $z$ :  $\mathbf{j} = (0, 0, j_z)$ , а сама плотность тока складывается из двух составляющих: плотности тока, текущего в центральной жиле  $j_0$ , и тока, текущего по оплётке  $j_l$ . Они порождают поле векторного потенциала, имеющего также только одну компоненту  $\mathbf{A} = (0, 0, A_z)$

$$\Delta A_z = -\mu_0 j_z. \quad (3.46)$$

Оператор Лапласа для декартовой компоненты векторного потенциала, зависящей от радиуса, имеет вид

$$\Delta A_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_z}{dr} \right) = -\mu_0 j_0 - \mu_0 \sigma j_1, \quad (3.47)$$

где  $\sigma$  – знаковый множитель. Для сонаправленных токов он принимает значение  $+1$ , а для токов противоположного направления  $-1$ .

Предположим, что в (3.47) обе плотности токов однородны по поперечному сечению, коаксиальный кабель имеет внешний радиус  $R$ , а геометрия его поперечного сечения, представлена на рис. 7.

На рис. 3.6 введены обозначения:  $r_1$  – внешний радиус первой области (радиус проводника центральной жилы),  $r_2$  – внешний радиус второй немагнитной области,  $R$  – внешний радиус оплётки коаксиального кабеля,  $r$  – текущий радиус цилиндра. Всегда выполнено условие, что  $r_1 < r_2 < R$ .

Из (3.45) следует, что такое поле векторного потенциала в каждой области коаксиального кабеля порождает индукцию магнитного поля с одной компонентой

$$B_\varphi = -\frac{dA_z}{dr}. \quad (3.48)$$

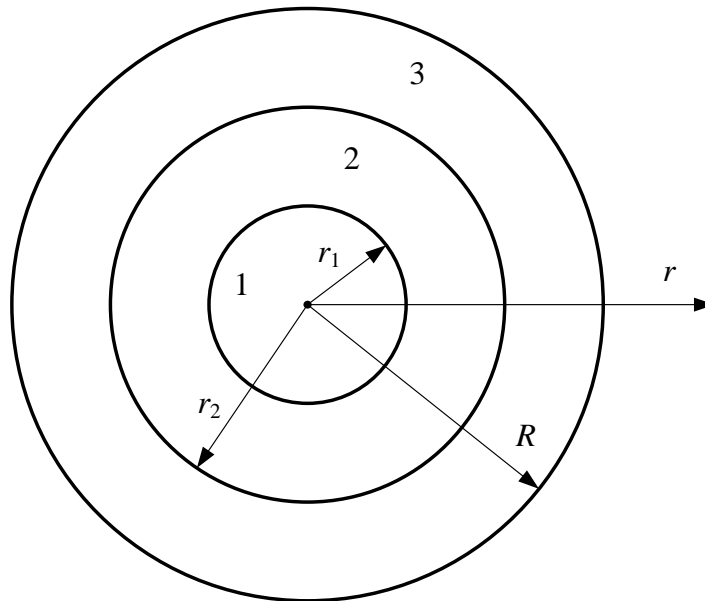


Рис. 3.6. Поперечное сечение коаксиального кабеля

### 3.2.2. Распределение векторного потенциала внутри коаксиального кабеля

Цилиндрическая поверхность коаксиального кабеля, имеющего внешний радиус  $R$ , содержит внутри себя области, в которых возбуждено статическое магнитное поле (см. рис. 3.6). Их три: область 1 ( $0 \leq r \leq r_1$ ), в которой есть ток  $j_0$ ; внутренняя область 2, в которой  $r_1 \leq r \leq r_2$  и токов нет; и внешняя область 3 ( $r_2 \leq r \leq R$ ), где есть ток  $j_1$ . Поставленная задача

очень похожа на задачу электростатики для уравнения Пуассона (внутренняя краевая задача с тремя границами).

Тогда для области 1 (потенциал и индукция далее отмечены индексом «1») уравнение (3.47) имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\mu_0 j_0, \quad (3.49)$$

а во второй области на рис.1 (потенциал отмечен индексом «2») –

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_2}{dr} \right) = 0. \quad (3.50)$$

В уравнении (3.47) перейдём к новой функции  $y_1(\xi) = A_z / A_*$ , где  $\xi = r / R$ , в области  $0 \leq \xi \leq \xi_1$ , а

$$A_* = \mu_0 j_0 R^2 / 4 \quad (3.51)$$

– масштаб векторного потенциала, одинаковый во всех областях.

Решение (3.49) для области 1 имеет вид

$$y_1 = -\frac{u_0}{4} \xi^2 + c_1 \ln \xi + c_2, \quad (3.52)$$

где

$$u_0 = j_0 / j_*, \quad (3.53)$$

а

$$j_* = A_* / (\mu_0 R^2)$$

– масштаб плотности тока. Калибруя векторный потенциал по условию  $y_1(0) = 0$ , а тогда  $c_1 = c_2 = 0$ , приходим к решению в области 1, имеющему вид

$$y_1 = -\frac{u_0}{4} \xi^2. \quad (3.54)$$

Решение уравнения (3.50) для области 2 ( $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ ) имеет вид

$$y_2 = c_3 \ln \xi + c_4, \quad (3.55)$$

где  $c_3, c_4$  – произвольные постоянные. Распределение векторного потенциала в области 3 ( $\xi_2 \leq \xi \leq 1$ ) получается из решения уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_3}{dr} \right) = -\mu_0 \sigma j_1,$$

которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{1}{\xi} (\xi y')' = -\sigma u_1, \quad (3.56)$$

где  $u_1$  связано с масштабом плотности тока соотношением

$$u_1 = j_1 / j_*. \quad (3.57)$$

Решение (3.56) в области 3 ( $\xi_2 \leq \xi \leq 1$ ) имеет вид

$$y_3 = -\frac{\sigma u_1}{4} \xi^2 + c_5 \ln \xi + c_6, \quad (3.58)$$



где  $c_5, c_6$  – произвольные постоянные. Все произвольные постоянные должны быть определены в процессе решения граничной задачи.

### 3.2.3. Распределение индукции магнитного поля внутри коаксиального кабеля

Радиальное распределение индукции в трёх областях находим из (3.48)

$$B_\varphi = -B_* \frac{dy}{d\xi}, \quad (3.59)$$

где

$$B_* = A_* / R = \mu_0 j_0 R / 4 \quad (3.60)$$

– масштаб индукции магнитного поля.

В первой области  $0 \leq \xi \leq \xi_1$  получим

$$\frac{B_1}{B_*} = -y'_1 = u_0 \xi / 2. \quad (3.61)$$

Из (3.61) следует, что вектор индукции магнитного поля в области  $0 \leq \xi \leq \xi_1$  сонаправлен с  $\vec{e}_\varphi$  (единичный азимутальный вектор) и из нулевых значений линейно нарастает с радиусом  $r$  системы.

Во второй области  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$  получим

$$\frac{B_2}{B_*} = -y'_2 = -c_3 / \xi. \quad (3.62)$$

Из (3.62) следует, что вектор индукции магнитного поля в области  $0 \leq \xi \leq \xi_1$  так же сонаправлен с  $\vec{e}_\varphi$  и убывает, либо нарастает, с радиусом  $r$  системы в зависимости от знака  $c_3$ .

В области 3  $\xi_2 \leq \xi \leq 1$  получим

$$\frac{B_3}{B_*} = -y'_3 = \sigma u_1 \xi / 2 - c_5 / \xi. \quad (3.63)$$

Из (3.63) следует, что вектор индукции магнитного поля в области  $\xi_2 \leq \xi \leq 1$  может быть сонаправлен с  $\vec{e}_\varphi$  при  $\sigma = -1$ , а может быть противоположного направления с  $\vec{e}_\varphi$  при  $\sigma = +1$ . Уточнение распределения индукции и векторного потенциала магнитного поля коаксиального кабеля также зависит от знака  $c_5$  и может быть проведено после определения произвольных постоянных на трёх границах системы.

Постоянные  $c_3$  и  $c_4$  определяем из условия непрерывности функции потенциала и её производной на границе областей  $\xi = \xi_1$

$$c_3 = -u_0 \xi_1^2 / 2, \quad (3.64)$$

$$c_4 = u_0 \xi_1^2 (2 \ln \xi_1 - 1) / 4. \quad (3.65)$$

Постоянную  $c_5$  определяем из требования равенства нулю индукции магнитного поля на внешнем радиусе  $R$

$$c_5 = \sigma u_1 / 2. \quad (3.66)$$

Постоянную  $c_6$  определяем из равенства потенциалов на границе  $\xi_2$

$$c_6 = \frac{u_0 \xi_1^2}{4} [2 \ln(\xi_1 / \xi_2) - 1] + \frac{\sigma u_1}{4} (\xi_2^2 - 2 \ln \xi_2). \quad (3.67)$$

Как видно из значений найденных произвольных постоянных, индукция магнитного поля в первой области положительная и линейно нарастающая. Во второй области она положительна, но всегда убывающая. Затем при переходе через границу раздела  $\xi_2$  индукция испытывает скачок. Скачок может быть со сменой знака, а может быть и без смены знака индукции. При значении знаковой функции  $\sigma=+1$  (оба тока в кабеле одинакового направления) индукция становится отрицательной и с ростом  $\xi$  она стремится к нулю. При значении знаковой функции  $\sigma=-1$  (токи кабеля имеют разные направления) она остаётся положительной испытывает положительный либо отрицательный скачок и с ростом  $\xi$  стремится к нулю.

#### **3.2.4. Управление индуктивностью коаксиального кабеля для сонаправленных и встречных токов**

Полная индуктивность коаксиального кабеля складывается из трёх индуктивностей: токовой, которая возникает в области 1, потоковой, которая характеризует область 2 и снова токовой, которая возникает в области 3

$$L = L_1 + L_2 + L_3. \quad (3.68)$$

Поясним, что мы под этим понимаем. Наличие трёх областей, в которых магнитное поле распределено по разным законам указывает на то, что индуктивность прямолинейного круглого тока складывается из трёх частей. Первая часть соответствует индуктивности, которая связана с потоком магнитного поля в области 1. В ней силовые линии магнитного поля поперечны линиям плотности тока. В связи с этим её удобно назвать первой токовой частью коаксиальной индуктивности.

Вторая часть соответствует индуктивности, которая связана с магнитным потоком, находящимся в области 3. В этой области нет тока, поэтому её удобно назвать потоковой частью коаксиальной индуктивности.

Третья часть соответствует индуктивности, которая связана с потоком магнитного поля в области 3. В ней силовые линии магнитного поля снова поперечны линиям плотности тока. В связи с этим её удобно назвать второй токовой частью коаксиальной индуктивности.

Если цилиндрический коаксиальный кабель разрезать по оси (см. рис. 3.7), то видна область, по которой следует интегрировать при вычислении потока в области 1. Ось проводника обозначена  $OO'$ , а элементарная площадка интегрирования  $dS$  – заштрихована. Для областей 2 и 3 площадка  $dS$  перемещается в соответствующую область.

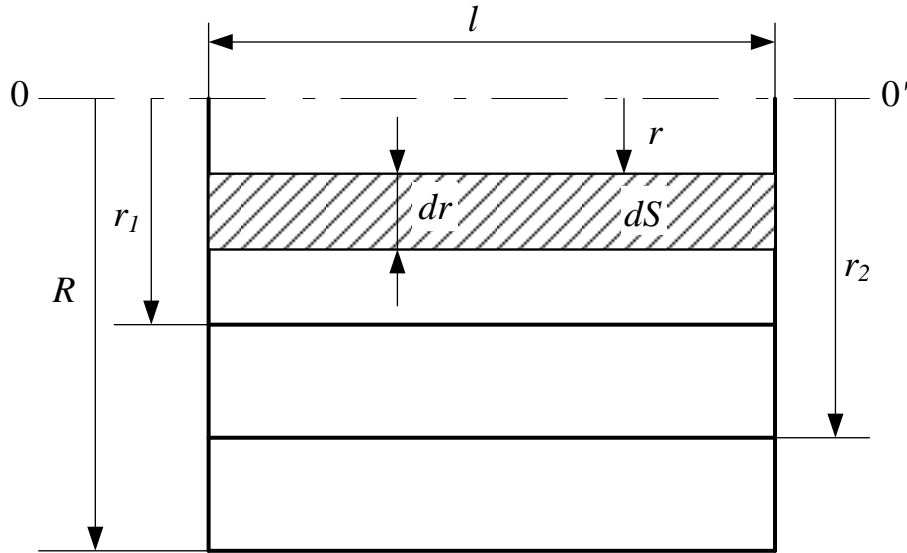


Рис. 3.7. Площадка интегрирования при вычислении потока в области 1

Вычисляя магнитный поток в области 1, получим

$$\Phi_1 = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B_\varphi dS_\varphi = \int_0^l dz \int_0^{r_1} B_1(r) dr = \Phi_* \xi_1^2 / 2, \quad (3.69)$$

где  $\Phi_* = A_* \mu_0 / 2$  - масштаб потока. Между током в области 1 и потоком существует базовая связь

$$\Phi_1 = L_1 i_1, \quad (3.70)$$

где  $L_1$  – первая токовая коаксиальная индуктивность. Подставляя в (3.70) ток, выраженный через плотность тока и площадь области 1, получим погонную индуктивность в виде

$$\frac{L_1}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} = const. \quad (3.71)$$

Как видно из (3.71), она с точностью до постоянной величины совпадает с магнитной постоянной.

Рассуждая аналогично для области 2, получим

$$\Phi_2 = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B_\varphi dS_\varphi = \int_0^l dz \int_{r_1}^{r_2} B_2(r) dr = \Phi_* \xi_1^2 \ln(\xi_2 / \xi_1) \quad (3.72)$$

Применяя (3.70) для тока  $i_1$  и потока  $\Phi_2$ , получим для второй коаксиальной потоковой погонной индуктивности, величину, зависящую от расположения границ системы

$$\frac{L_2}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(\xi_2 / \xi_1) \quad (3.73)$$

Вычисление третьей токовой погонной индуктивности сводится к вычислению потока, в котором индукция, а стало быть, и поток, в области интегрирования может быть и отрицательной

$$\Phi_3 = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B_\varphi dS_\varphi = \int_0^l dz \int_{r_2}^R B_3(r) dr = \Phi_{*1} \left[ (1 - \xi_2^2) / 2 + \ln \xi_2 \right], \quad (3.74)$$

где масштаб потока  $\Phi_{*1} = A_* l \sigma u_1 / 2$ . (3.75)

Значение магнитного потока будет положительно (токи текут в разные стороны), если  $\sigma = -1$  и отрицательно, если токи в коаксиальном кабеле текут сонаправлено.

Ток, создающий поток  $\Phi_3$ , складывается из всех токов, протекающих в системе

$$i = j_0 \pi r_1^2 + \sigma j_1 \pi (R^2 - r_2^2). \quad (3.76)$$

Учитывая связь (3.70) между  $\Phi_3$  и (3.76), получим для второй токовой погонной индуктивности кабеля соотношение

$$\frac{L_3}{L_*} = \frac{4\pi L_3}{\mu_0 l} = \frac{\sigma u (1 - \xi_2^2 + 2 \ln \xi_2)}{\left[ \xi_1^2 + \sigma u (1 - \xi_2^2) \right]}, \quad (3.77)$$

где  $L_* = \mu_0 l / (4\pi)$  (3.78)

– масштаб индуктивности,

$$u = \frac{i_1}{i_0} \frac{\xi_1^2}{(1 - \xi_2^2)} \quad (3.79)$$

– параметр, связанный с отношением токов, протекающих в коаксиальном кабеле и зависящий от относительных значений внутренней и внешней границ системы.

В таблице 3.2 приведены значения второй токовой индуктивности в зависимости от отношения токов. Её значения вычислены при следующих предположениях:  $\xi_1 = 0,25$ ;  $\xi_2 = 0,75$ ; токи сонаправлены ( $\sigma = +1$ ).

Таблица 3.2

Приведённые значения второй токовой индуктивности  
при ( $\sigma = +1$ )

$i_1/i_0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$-L_3/L_*$	0,53	0,90	0,12	0,14	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21

Как видно из табл. 3.2, вторая токовая индуктивность всегда отрицательная. Физические причины этого становятся понятными. Индуктивность с ростом отношения токов сначала увеличивается почти в два раза, а затем, начинает падать, а потом снова медленно увеличиваться. Динамический диапазон перестройки можно оценить в четыре раза при изменении отношения токов в десять раз.

Полная индуктивность кабеля для выбранных расчётных значений оказывается всегда положительной величиной.

В таблице 3.3 приведены значения второй токовой индуктивности в зависимости от отношения токов. Значения вычислены при следующих предположениях:  $\xi_1=0,25$ ;  $\xi_2=0,75$ ; токи имеют противоположное направление ( $\sigma=-1$ ).

Таблица 3.3

Приведённые значения второй токовой индуктивности  
при ( $\sigma=-1$ )

$i_1/i_0$	0,85	0,90	0,95	1,05	1,1	1,15	1,20
$L_3/L_*$	1,79	2,84	5,99	-6,62	-3,47	-2,42	-1,89

Как видно из табл. 3.3, в этом случае вторая токовая индуктивность может быть как положительной, так и отрицательной. Она может принимать большие значения в области, когда токи становятся равны друг другу. В этом случае знаменатель выражения (3.77) обращается в нуль при выполнении условия

$$u = \xi_1^2 / (1 - \xi_2^2). \quad (3.38)$$

Тогда возможен случай, когда при значении отношения токов 1,05 величина  $L_3/L_*=-6,62$  (см. табл. 3.3). При таких больших значениях второй токовой индуктивности полная приведённая индуктивность будет отрицательной

$$\frac{L}{L_*} = 1 + 2 \ln(\xi_2 / \xi_1) + \frac{L_3}{L_*} = -3,43. \quad (3.39)$$

По разделу 3 опубликованы работы [49-51].

### 3.3. Выводы по разделу 3.2

- Предложен аналитический метод расчёта радиального распределения векторного потенциала и индукции магнитного поля в бесконечно длинном коаксиальном кабеле.
- Уравнение магнитостатики, записанное для векторного потенциала, решается для трёх областей коаксиального кабеля, на которых сформулированы граничные условия.

- Шесть произвольных постоянных определяются из граничных условий.
- Радиальное распределение вектора магнитной индукции таково, что в первой области она положительна и линейно нарастает с увеличением радиуса.
- Во второй области магнитная индукция убывает с ростом радиуса, оставаясь положительной.
- При переходе через границу раздела между второй и третьей областями индукция испытывает скачок.
- Скачок может быть со сменой знака, а может быть и без смены знака индукции.
- Когда оба тока в кабеле имеют одинаковые направления, то индукция в третьей области становится отрицательной и с ростом радиуса стремится к нулю (скачок со сменой знака).
- Когда оба тока в кабеле имеют разные направления индукция магнитного поля в этой области остаётся положительной, но испытывает положительный, либо отрицательный скачок и с ростом радиуса стремится к нулю.
- Полная индуктивность коаксиального кабеля складывается из трёх погонных индуктивностей: двух токовых, которые возникают в областях 1 и 3 и одной потоковой, которая формируется в области 3.
- Вычисление первой токовой индуктивности показывает, что её значение с точностью до постоянной величины совпадает с магнитной постоянной.
- Вычисление второй потоковой индуктивности указывает на то, что её значение оказывается пропорциональной логарифму отношения граничных радиусов первой и второй области.
- Вычисление второй токовой индуктивности указывает на то, что она может быть управляема отношением и направлением токов в центральной жиле и оплётке.
- При совпадении направлений обоих токов она мала и отрицательна. Её значение не может изменить положительный характер полной индуктивности.
- При токах разных направлений эта часть индуктивности становится большой и может быть при одном отношении токов положительной, а при другом отношении токов – отрицательной.
- Численное моделирование на конкретных размерах областей показывает, что при определённых значениях противоположных токов она становится отрицательной и такой большой, что знак полной индуктивности тоже может стать отрицательным.

## ГЛАВА 4

### РАЗРАБОТКА АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РАСЧЁТА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНДУКТИВНОСТЕЙ ДЛЯ МИКРОСХЕМ И СИСТЕМ НА КРИСТАЛЛЕ

#### 4.1. Индукционные и индуктивные свойства проводящего цилиндра с азимутальной плотностью вихревого тока

В разделе 4 найден подход к решению задач цилиндрической геометрии, в которых между током и потоком может существовать конечный фазовый сдвиг. Этот подход объединяет в себе возможности двумерных и трёхмерных задач, решение которых запланировано в проекте и не ограничивает возможный диапазон изменения частоты переменного тока.

Для расчёта другого класса индуктивностей, названных нами вносимыми, можно обратиться принятый ранее порядок расчёта:

- Задаём внешнее переменное магнитное поле  $\vec{B}$  высокой симметрии.
- Направляем его в немагнитный проводящий цилиндр так, чтобы оси цилиндра и направления внешнего магнитного поля совпадали.
- Записываем первое уравнение Максвелла, из которого по известной правой части определяем распределение вихревого электрического поля  $\vec{E}_{rot}$ .
- Привлекая закон Ома в дифференциальной форме  $\vec{j} = \vec{E}_{rot} / \rho$ , находим пространственное распределение плотности вихревых токов.
- Интегрируя распределение плотности тока через поперечную току площадь, получаем значение полного тока, возникающее в проводящем цилиндре.
- Используя баланс энергий, поступающих в систему, для значений, усреднённых по периоду изменения поля, получаем вносимую энергетическую индуктивность в том случае, если квадрат внешнего магнитного поля сократится в обеих частях равенства баланса энергий.

##### 4.1.1. Физико-математическая модель расчёта. Две ориентации силовых линий вихревого электрического поля

Физико-математическая модель расчёта базируется на решении первого уравнения Максвелла, которое в физике иногда называют дифференциальной формой записи закона электромагнитной индукции Фарадея [11]

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Она описывает закон порождения вихревого электрического поля  $\vec{E}$  в некоторой точке пространства за счёт изменения во времени вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  в той же точке пространства.

Представим себе, что в некоторой области свободного пространства внешними токами создано однородное  $\vec{B}_0 = \text{const}$  переменное магнитное поле с зависимостью от времени

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos \omega t. \quad (4.2)$$

При этом предполагается, что вектор  $\vec{B}$  не изменяет своё выделенное направление в пространстве, а изменяет свой модуль только во времени со скоростью

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\omega \vec{B}_0 \sin \omega t. \quad (4.3)$$

На рис. 4.1 представлена ориентация силовых линий (указаны стрелками) однородного магнитного поля по отношению к сплошному немагнитному проводящему цилиндру, который помещён в это однородное поле. На рис. 4.1 введены обозначения:  $OO'$  – ось сплошного цилиндра;  $R$  – радиус цилиндра;  $h$  – высота цилиндра. Вектор  $\vec{B}$  направлен по оси  $z$ , которая совпадает с осью цилиндра. В дальнейшем будем использовать естественную для исследуемой модели правую ортогональную систему цилиндрических координат  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ . Символами  $e_r, e_\varphi, e_z$  – обозначены единичные орты направления соответствующих осей.

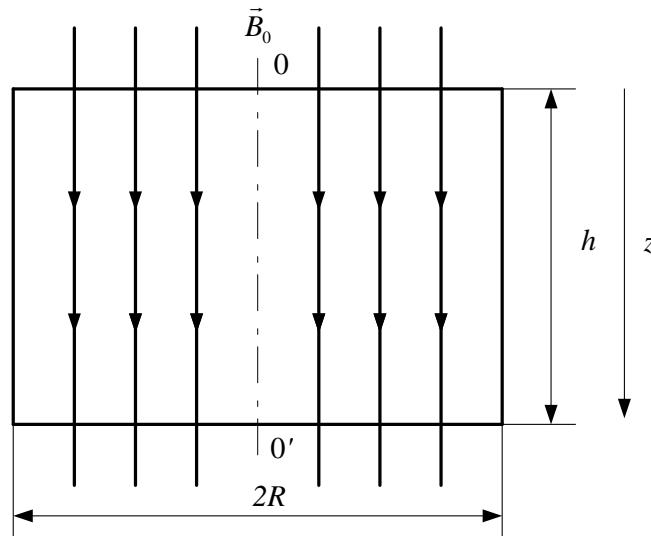


Рис. 4.1 Ориентация силовых линий магнитного поля по отношению к проводящему цилиндру



Подставляя (4.3) в (4.1), получим

$$\text{rot} \vec{E} = \omega \vec{B}_0 \sin \omega t. \quad (4.4)$$

Существует несколько возможных ориентаций силовых линий вихревого электрического поля в свободном пространстве. На рис. 4.2 представлен выделенный фрагмент свободного пространства для первой ориентации вихрей электрического поля. На рис. 4.2 направление вектора  $\vec{B}_0$  за лист обозначено крестиком в кружочке. Взято четыре силовые линии вектора  $\vec{B}_0$  (обозначены крестиками). Силовые линии вихревого поля  $\vec{E}$  отмечены стрелками и нарисованы в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}_0$ . Картина нарисована для момента времени, который находится в интервале времени убывания вектора  $\vec{B}_0$ . Тогда индукционные токи, совпадающие по направлению с силовыми линиями вектора  $\vec{E}$ , создают своё индукционное магнитное поле, которое сонаправлено с вектором  $\vec{B}_0$ .

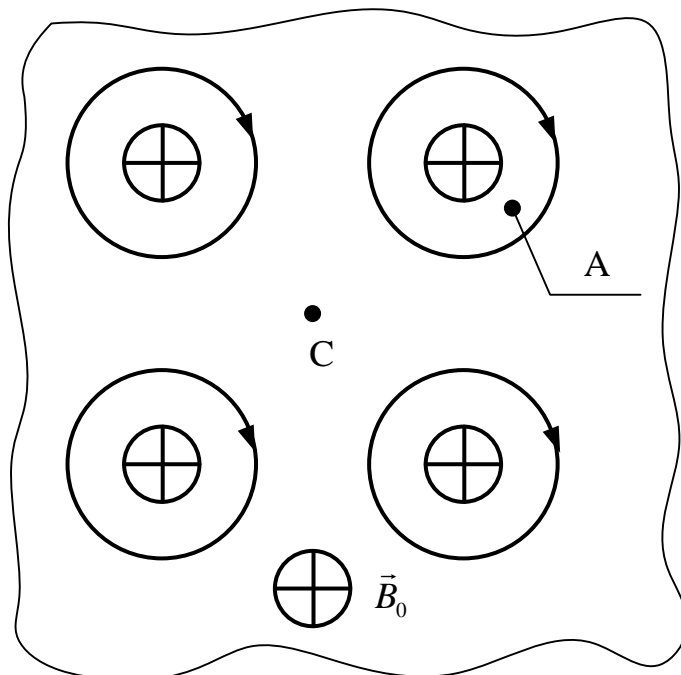


Рис. 4.2. Фрагмент первой ориентации силовых линий вихревого электрического поля

Выбор начала цилиндрической системы координат в точке А или в точке С (см. рис. 4.2) приводит к тому, что в этой плоскости вихревое электрическое поле всегда имеет две компоненты  $E_r$  и  $E_\varphi$ . В связи с этим проекция равенства (4.4) на ось цилиндрической системы координат имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = \omega B_z \sin \omega t. \quad (4.5)$$

На рис. 4.3 представлена другая возможная ориентация силовых линий вихревого электрического поля в свободном пространстве. На рис. 4.3 направление вектора  $\vec{B}_0$  обозначено крестиком в кружочке. Взято пять силовых линий вектора  $\vec{B}_0$ . Силовые линии вихревого поля  $\vec{E}$  отмечены стрелками и нарисованы в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}_0$ . Картина нарисована для того же момента времени.

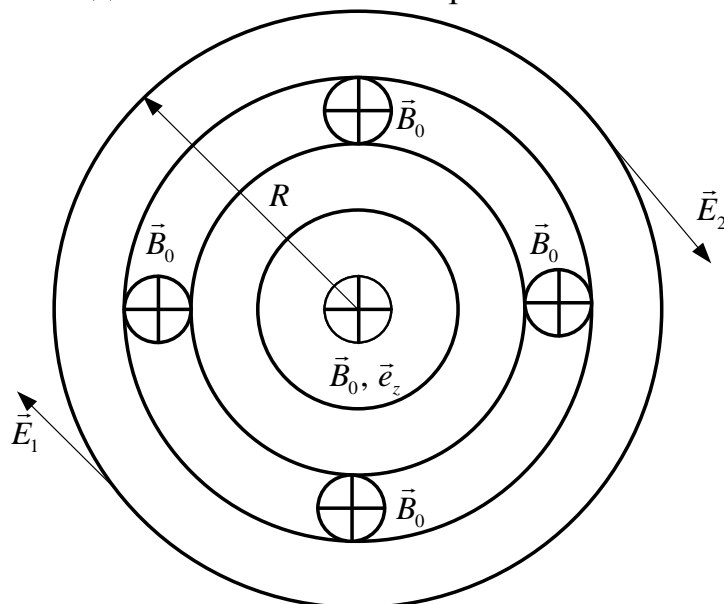


Рис.4.3. Фрагмент второй ориентации силовых линий вихревого электрического поля

Её принципиальное отличие от силовых линий напряжённости вихревого поля, представленного на рис. 4.2 заключается в том, что эти силовые линии находятся на концентрических окружностях. При такой ориентации вихревое электрическое поле  $\vec{E}$  имеет одну компоненту  $E_\varphi$ , а  $E_r$  – обращается в нуль. Для этого начало цилиндрической системы координат следует совместить с точкой, лежащей на оси  $OO'$  сплошного цилиндра, а направление оси  $z$  выбрать совпадающим с осью цилиндра  $OO'$ .

Впервые экспериментальное доказательство существования такой возможной ориентации вихревого электрического поля было обнаружено при создании бетатронов – индукционных ускорителей электронов. В них как раз ускорение электронов и осуществляется вихревым электрическим полем, силовые линии которого представляют собой концентрические окружности, представленные на рис. 4.3. Они формируются электромагнитом специальной формы [52].

Поскольку в бетатроне это поле нагружено плотностью тока азимутального направления из электронов, то предположим, что именно

такое вихревое поле формируется в сплошном проводящем цилиндре, объём которого пересекается силовыми линиями однородного переменного магнитного поля  $\vec{B}_0$ .

На рис. 4.4 представлена ориентация проводящего кольца по отношению к направлению поля  $B_z$ . Радиус отверстия кольца обозначен через  $r_1$ , а произвольная толщина кольца (или цилиндра) обозначена через  $h$ .

Предполагая, что вихревое электрическое поле совпадает по фазе со скоростью изменения магнитного поля

$$E_\varphi = E_0(r) \sin \omega t, \quad (4.6)$$

из уравнения (4.4) получим уравнение, связывающее  $E_0(r)$  и  $B_0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_0(r)) = \omega B_0. \quad (4.7)$$

Его решение для  $E_0(r)$  имеет вид

$$E_0(r) = \omega B_0 r / 2 + C_1 / r. \quad (4.8)$$

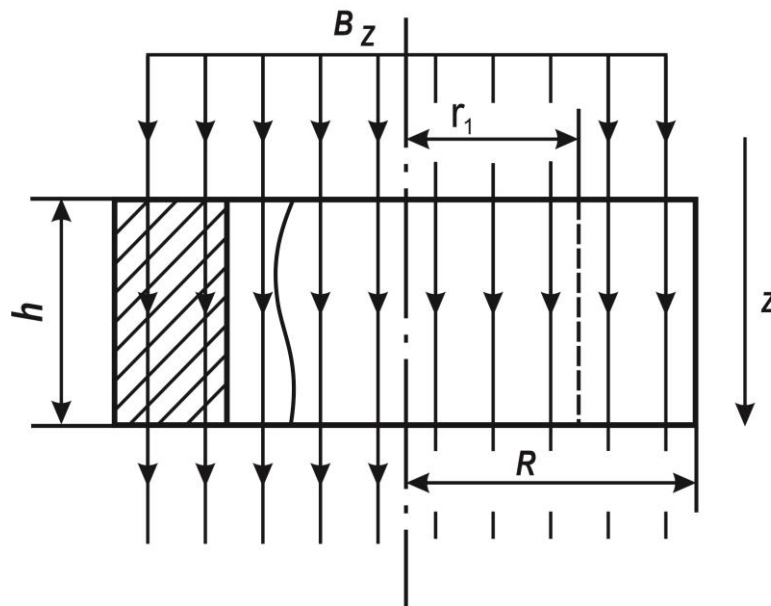


Рис. 4.4. Ориентация проводящего кольца по отношению к осевому магнитному полю

В решении (4.8) выберем постоянную  $C_1=0$  из условия, что при  $B_0 = 0$ ;  $E_0 = 0$ . Из (4.8) видно, что азимутальная компонента вектора напряженности вихревого электрического поля – линейная функция радиуса с масштабом

$$E_* = \omega B_0 R / 2 = \pi \nu B_0 R. \quad (4.9)$$

Представим (4.8) с учетом (4.9) в виде

$$\frac{E_0(r)}{E_*} = \frac{r}{R}. \quad (4.10)$$

Средняя по радиусу напряжённость вихревого поля зависит от отношения  $r_1/R$

$$\langle E_0(r) \rangle_r = \frac{1}{R - r_1} \int_{r_1}^R E_* \frac{r}{R} dr = \frac{E_*}{2} (1 + r_1/R). \quad (4.11)$$

Распределение вихревого поля в однородном проводящем кольце создает вихревые токи Фуко, плотность тока которых имеет такое же направление в пространстве и рассчитывается из локального закона Ома

$$j_\varphi = E_\varphi / \rho, \quad (4.12)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление кольца.

Из (4.12) видно, что плотность тока Фуко в однородной проводящей среде  $\rho = \text{const}$  также является линейной функцией радиуса и также зависит от времени, как и  $E_\varphi$

$$j_\varphi = j_0(r) \sin \omega t, \quad (4.13)$$

где  $j_0(r)$  связано с масштабом плотности тока

$$j_* = \pi \nu B_0 R / \rho \quad (4.14)$$

соотношением

$$j_0(r) = j_* r / R. \quad (4.15)$$

Поскольку внутри кольца есть полость радиусом  $r_1$ , то плотность тока (4.15) внутри кольца изменяется от наименьшего значения на границе полости

$$j_0(r_1) = j_* r_1 / R \quad (4.16)$$

до наибольшего значения  $j_0(R) = j_*$ , совпадающего с масштабом плотности тока.

Средняя по радиусу плотность тока зависит от отношения  $r_1/R$  также как и средняя по радиусу напряжённость поля

$$\langle j_0(r) \rangle_r = \frac{1}{R - r_1} \int_{r_1}^R j_0(r) dr = \frac{j_*}{2} (1 + r_1/R). \quad (4.17)$$

Из соотношения (4.14) для масштаба плотности тока видно, что при прочих равных условиях он может достигать очень больших значений на высоких частотах для проводящей среды с малым значением удельного сопротивления  $\rho$ . Это будет приводить к существенному нагреву проводящих колец на высоких частотах.

Удельная тепловая мощность, выделяемая в локальной области проводника при протекании токов Фуко, рассчитывается из закона Джоуля Ленца:

$$p_v = \rho j_\varphi^2 = p_* \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \omega t, \quad (4.18)$$

где

$$p_* = \rho j_*^2 = \pi^2 \nu^2 B_0^2 R^2 / \rho \quad (4.19)$$

– масштаб объемной плотности тепловой мощности.

Как видно из (4.19), масштаб плотности уже пропорционален квадрату частоты и для проводящей среды с произвольным значением удельного сопротивления оказывается наиболее значительным на внешней границе кольца. Это будет приводить к его выгоранию. Что и наблюдается в экспериментах.

Средняя по радиусу удельная тепловая мощность зависит от отношения  $r_1/R$

$$\langle p_v \rangle_r = \frac{I}{R - r_1} \int_{r_1}^R p_* \frac{r^2}{R^2} dr = \frac{p_*}{3} \left( 1 + \frac{r_1}{R} + \frac{r_1^2}{R^2} \right). \quad (4.20)$$

Поскольку напряженность вихревого поля  $E_\phi$  зависит линейно от радиуса, то элементарная электродвижущая сила (ЭДС) индукции также будет зависеть от радиуса, момента времени и значения угла интегрирования (см. рис.4.5)

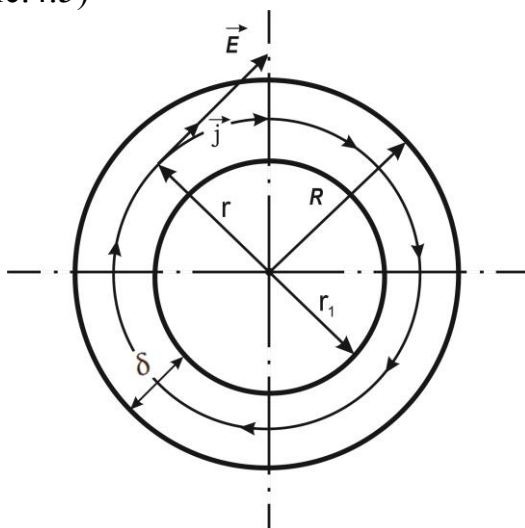


Рис. 4.5. Направление напряжённости вихревого поля и плотности тока в кольце

$$d\varepsilon = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_\phi r d\phi = \frac{E_* r^2 d\phi}{R} \sin \omega t. \quad (4.21)$$

На одной замкнутой силовой линии вихревого поля электродвижущая сила индукции зависит от ее радиуса

$$\varepsilon(r, t) = \varepsilon_* \frac{r^2}{R^2} \sin \omega t, \quad (4.22)$$

$$\text{где} \quad \varepsilon_* = 2\pi R E_* \quad (4.23)$$

– масштаб электродвижущей силы.

Как видно из (4.22), значение индукции достигает значения масштаба на границе кольца для моментов времени  $t = \pi / (2\omega) + 2\pi m / \omega$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Усредненное по радиусу значение ЭДС сохраняет ту же зависимость от времени

$$\langle \varepsilon \rangle_r = \frac{1}{R - r_l} \int_{r_l}^R \varepsilon_* \frac{r^2}{R^2} \sin \omega t dr = \frac{\varepsilon_*}{3} \left( 1 + \frac{r_l}{R} + \frac{r_l^2}{R^2} \right) \sin \omega t. \quad (4.24)$$

Как видно из (4.24), закон изменения  $\langle \varepsilon \rangle_r$ ... совпадает с законом изменения  $\langle p_v \rangle_r$ .

График зависимости приведенного значения средней по радиусу ЭДС индукции  $\langle \varepsilon \rangle_r / \varepsilon_*$  от приведенного радиуса полости  $r_l/R$  представлен на рис. 4.6. Из него видно, что она изменяется от 1/3 при  $r_l \rightarrow 0$  до наибольшего значения индукции, совпадающего с масштабом, и достигаемого в тонких кольцах, у которых  $r_l/R \rightarrow 1$ .

Полный ток, индуцированный в кольце и пересекающий площадь поперечного сечения

$$S = h(R - r_l), \quad (4.25)$$

где  $h$  – толщина кольца, может быть вычислен из интегрирования для фиксированного момента времени

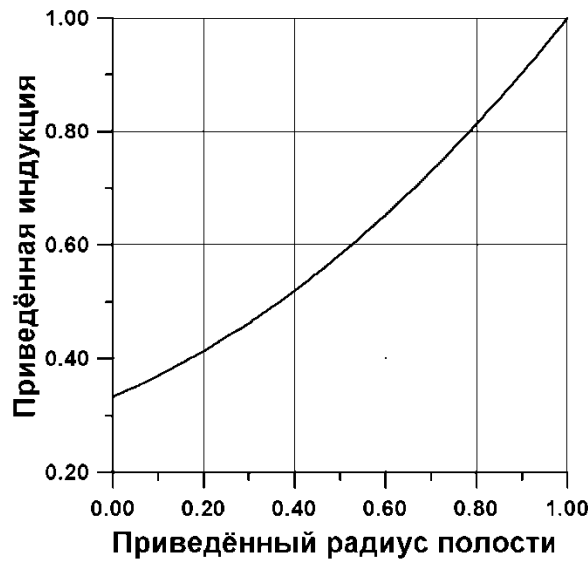


Рис. 4.6. Зависимость приведенного значения ЭДС индукции от приведенного радиуса полости

$$i = \int_S \vec{j} d\vec{s} = i_* \left( 1 - \frac{r_l^2}{R^2} \right) \sin \omega t, \quad (4.26)$$

где  $i_* = j_* h R / 2 = \pi \nu B_0 h R^2 / (2 \rho) \quad (4.27)$

– масштаб индукционного тока.

На рис. 4.7 представлена графическая зависимость приведенного тока индукции от приведенного радиуса полости  $r_l/R$ . Из него видно, что

приведенный ток индукции изменяется от 1 при  $r_l \rightarrow 0$  до очень малых значений в тонких кольцах, реализующихся при  $r_l / R \rightarrow 1$ .

Соотношения (4.26) и (4.24) позволяют определить независящее от времени усредненное значение интегрального омического сопротивления кольца индукционному току

$$\langle R \rangle = \frac{\langle \varepsilon \rangle_r}{i} = R_* \frac{(1 + r_l / R + r_l^2 / R^2)}{(1 - r_l^2 / R^2)}, \quad (4.28)$$

$$\text{где} \quad R_* = \varepsilon_* / (3i_*) \quad (4.29)$$

– масштаб омического сопротивления кольца.

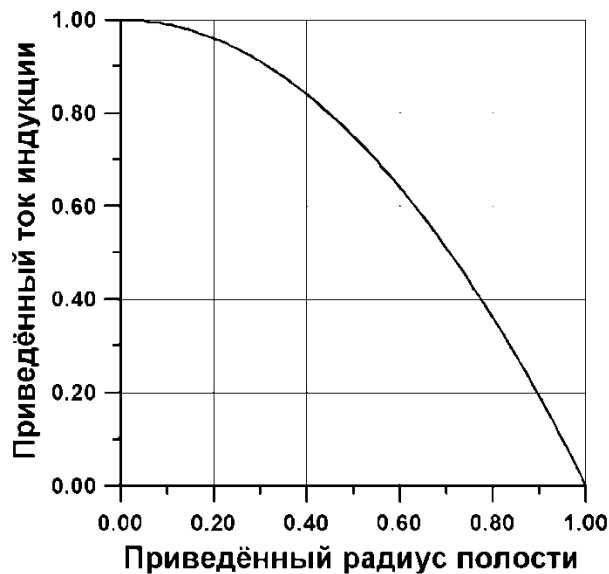


Рис. 4.7. Зависимость приведенного тока индукции от приведенного радиуса полости

На рис. 4.8 представлен график зависимости приведенного омического сопротивления  $\langle R \rangle / R_*$  от приведенного радиуса полости  $r_l / R$ . Из него видно, что приведенное усредненное значение омического сопротивления при  $r_l \rightarrow 0$  совпадает с единицей, а для тонких колец при  $r_l / R \rightarrow 1$  стремится к  $+\infty$ .

Это свойство усредненного интегрального омического сопротивления позволит при реализации тонких колец или цилиндров искусственно уменьшать тепловое энерговыделение проводника на высоких частотах.

Тепловая мощность, выделяемая во всем кольце, находится из (4.16) интегрированием для фиксированного момента времени

$$P = \int_V p_v dv = \int_V p_v(r, \varphi, z) r dr dz d\varphi = P_* (1 - r_l^4 / R^4), \quad (4.30)$$

где

$$P_* = p_* \pi R^2 h / 2 \quad (4.31)$$

— масштаб тепловой мощности.

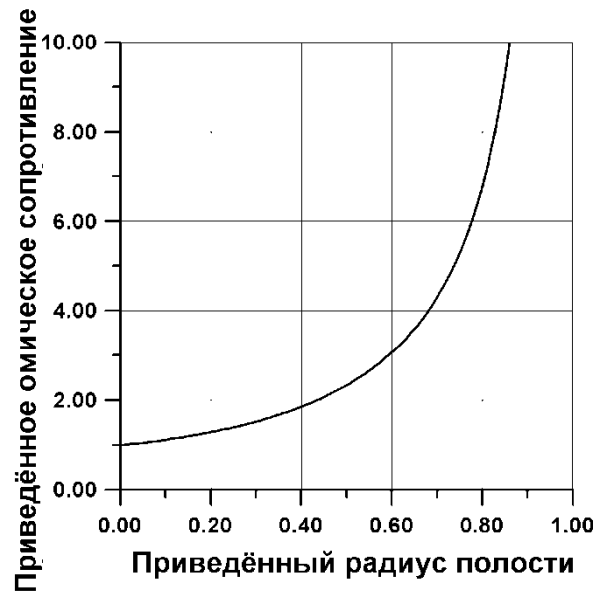


Рис. 4.8. Зависимость приведённого омического сопротивления от приведённого радиуса полости

На рис. 4.9 представлена зависимость приведенной тепловой мощности  $P/P_*$  от приведенного радиуса полости  $r_l/R$ . Как видно из рисунка, она быстро изменяется от 1 при  $r_l \rightarrow 0$  до нуля для случая тонких колец, когда  $r_l/R \rightarrow 1$ .

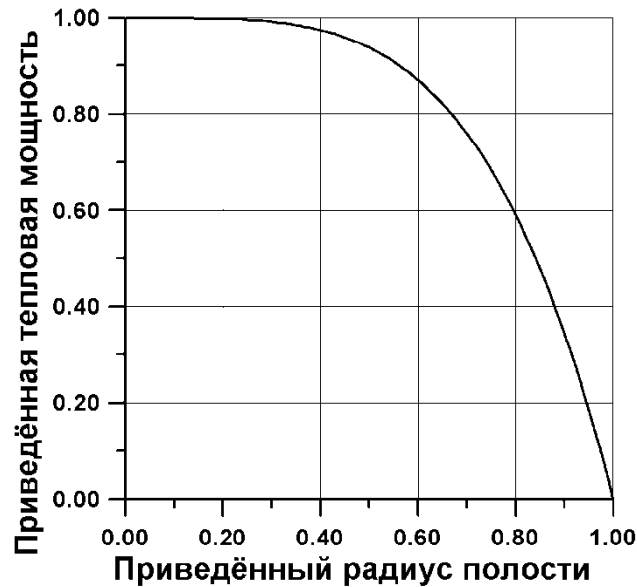


Рис. 4.9. Зависимость приведённой тепловой мощности от приведённого радиуса полости



Соотношение (4.30) также указывает на уменьшение выделения тепловой мощности на высоких частотах при реализации радиально тонких колец или цилиндров для случая  $r_I / R \rightarrow 1$ .

Наличие фазового сдвига по времени между индукционным током кольца и магнитным потоком не позволяет использовать формулу для определения индуктивности в виде

$$\Phi = Li. \quad (4.32)$$

Это нельзя сделать и для переменного тока, используя соотношение для ЭДС индукции

$$\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}, \quad (4.33)$$

поскольку и в этом случае между ЭДС и скоростью изменения тока существует ненулевой фазовый сдвиг.

#### 4.1.2. Энергетический баланс в системе

Рассчитаем значение вносимой индуктивности из энергетических соображений. Силовые линии магнитного поля  $B_z$  пронизывают весь объем кольца и вносят в него магнитную энергию  $W$ , значение которой зависит от времени

$$W(\vec{r}, t) = \int_V \frac{B_z^2}{2\mu_0} dV. \quad (4.34)$$

При усреднении за период изменения поля эта энергия имеет конечное значение:

$$\langle W \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T W(\vec{r}, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt \int_V \frac{B_0^2}{2\mu_0} dV = \frac{B_0^2 \pi R^2 h}{4\mu_0}. \quad (4.35)$$

Поскольку эта же энергия магнитного поля создает вихревое электрическое поле, которое формирует индукционный ток, будем считать, что усредненное значение магнитной энергии (4.35) совпадает с усредненным за период значением энергии, запасенной индуктивностью

$$\langle W \rangle_T = \frac{L}{2} \langle i^2 \rangle_T, \quad (4.36)$$

где под  $\langle i^2 \rangle_T$  понимается усреднение, выполненное за такой же период изменения тока

$$\langle i^2 \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T i_*^2 \left(1 - r_I^2 / R^2\right)^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{i_*^2}{2} \left(1 - \frac{r_I^2}{R^2}\right)^2. \quad (4.37)$$

### 4.1.3. Частотная зависимость вносимой интегральной индуктивности трубчатого проводящего цилиндра

Подставляя в (4.36) соотношения (4.35) и (4.37), получим для вносимой индуктивности выражение

$$L = L_* \left( 1 - r_l^2 / R^2 \right)^{-2}, \quad (4.38)$$

где

$$L_* = 4\rho^2 / (\mu_0 \nu^2 V) \quad (4.39)$$

– масштаб индуктивности, а

$$V = \pi R^2 h \quad (4.40)$$

– полный объем кольца.

Как видно из (4.39), масштаб индуктивности может варьироваться в широких пределах при изменении параметров трех физических величин: квадрата удельного сопротивления, квадрата частоты и полного объема, занимаемого кольцом.

На рис. 4.10 представлена зависимость приведенной индуктивности  $L/L_*$  от приведенного радиуса полости  $r_l/R$ . Как видно из рисунка, ее значение совпадает со значением 1 при  $r_l \rightarrow 0$ . Для радиально тонких колец или удлиненных цилиндров при выполнении условия  $r_l/R \rightarrow 1$  индуктивность резко увеличивается по сравнению с масштабом.

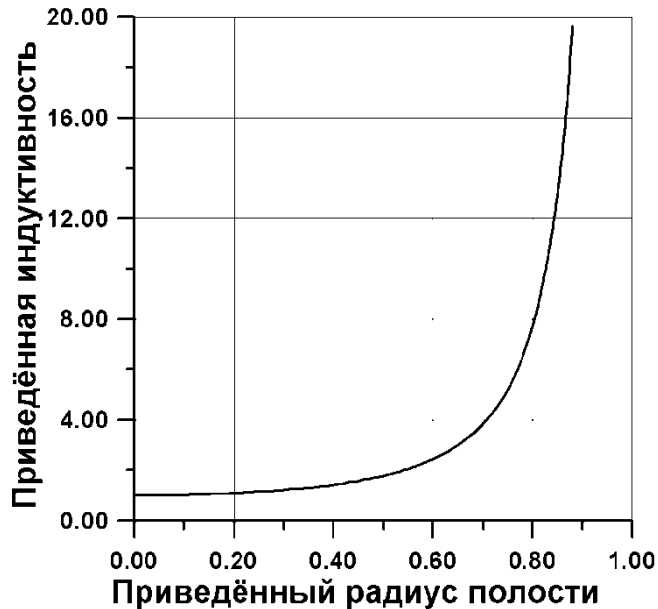


Рис. 4.10. Зависимость приведённого значения индуктивности от приведённого радиуса полости

Это свойство вносимой индуктивности позволяет ее увеличивать за счет изменения радиальной толщины при реализации тонких колец или удлиненных цилиндров. В этом случае они обладают уменьшенным тепловым энерговыделением.

#### 4.1.4. Основные физические параметры цилиндров с малой радиальной толщиной

При малой радиальной толщине  $\delta = R - r_l$  выполняется условие  $\delta / R \ll 1$ . В этом приближении распределение напряженности вихревого поля по радиусу цилиндра можно считать однородным

$$E_\varphi = E_0(r) \sin \omega t = E_* \sin \omega t. \quad (4.41)$$

Используя свойства разложений

$$\frac{r_l}{R} = 1 - \delta / R, \quad \frac{r_l^2}{R^2} \approx 1 - 2\delta / R, \quad \left(1 - \frac{r_l^2}{R^2}\right)^2 \approx 4 \frac{\delta^2}{R^2}, \quad (4.42)$$

выпишем основные законы распределения физических параметров в цилиндрах с малой радиальной толщиной.

Плотность тока внутри цилиндра распределена однородно

$$j_\varphi = j_* \sin \omega t. \quad (4.43)$$

Удельная тепловая мощность, выделяемая в локальной области тонкого цилиндра, тоже однородна

$$p_v = \rho j_*^2 \sin^2 \omega t. \quad (4.44)$$

На силовой линии вихревого поля электродвижущая сила индукции не зависит от ее радиуса

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_* \sin \omega t. \quad (4.45)$$

Усредненное по радиусу значение ЭДС сохраняет ту же зависимость от времени и незначительно зависит от радиальной толщины цилиндра  $\delta$

$$\langle \varepsilon \rangle_r = \varepsilon_* (1 - \delta / R). \quad (4.46)$$

Полный ток, индуцированный в тонком цилиндре, мал

$$i = 2i_* \delta / R. \quad (4.47)$$

Интегральное омическое сопротивление тонкого цилиндра становится большим, по сравнению с масштабом, из-за особенности в знаменателе

$$\langle R \rangle \approx 3RR_* / (2\delta). \quad (4.48)$$

Тепловая мощность, выделяемая в тонком цилиндре, становится маленькой и пропорциональной  $\delta / R$

$$P = 4P_* \delta / R. \quad (4.49)$$

Вносимая индуктивность тонкого цилиндра становится большой по сравнению с масштабом из-за особенности в знаменателе

$$L = L_* R^2 / (4\delta^2). \quad (4.50)$$

#### 4.1.5. Расчёты величины вносимой индуктивности проводящего цилиндра конечной толщины

Поскольку современные материалы от проводников до собственных полупроводников имеют удельное сопротивление, изменяющееся в диапазоне

$$15,5 \text{ нОм} \cdot \text{м} < \rho < 2,5 \text{ кОм} \cdot \text{м},$$

то формулы для расчета вносимой индуктивности (4.36) и (4.37) дают широкие возможности для ее изменения.

В таблице 4.1 рассчитаны значения частоты  $\nu$  в герцах, которые для малого объёма цилиндра, равного  $3,14 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3$ , дают значения индуктивности в интервале от 100 мГн до 1 нГн для различных проводящих материалов.

Таблица 4.1

Значения частоты для различных проводящих материалов

	100 мГн	10 мГн	1 мГн	100 мкГн	10 мкГн	1 мкГн	100 нГн	10 нГн	1 нГн
Медь	15,6	49,3	156	493	$1,56 \cdot 10^3$	$4,93 \cdot 10^3$	$1,56 \cdot 10^4$	$4,93 \cdot 10^4$	$1,56 \cdot 10^5$
Вольфрам	49,2	156	493	$1,56 \cdot 10^3$	$4,93 \cdot 10^3$	$1,56 \cdot 10^4$	$4,93 \cdot 10^4$	$1,56 \cdot 10^5$	$4,93 \cdot 10^5$
Никель	61,8	195	618	$1,95 \cdot 10^3$	$6,18 \cdot 10^3$	$1,95 \cdot 10^4$	$6,18 \cdot 10^4$	$1,95 \cdot 10^5$	$6,18 \cdot 10^5$
Нихром	$1,01 \cdot 10^3$	$3,18 \cdot 10^3$	$1,01 \cdot 10^4$	$3,18 \cdot 10^4$	$1,01 \cdot 10^5$	$3,18 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^6$	$3,18 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^7$
КЭЭФ	$1,01 \cdot 10^6$	$3,18 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^7$	$3,18 \cdot 10^7$	$1,01 \cdot 10^8$	$3,18 \cdot 10^8$	$1,01 \cdot 10^9$	$3,18 \cdot 10^9$	$1,01 \cdot 10^{10}$
Германий	$4,73 \cdot 10^8$	$1,5 \cdot 10^9$	$4,73 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^{10}$	$4,73 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^{11}$	$4,73 \cdot 10^{11}$	$1,5 \cdot 10^{12}$	$4,73 \cdot 10^{12}$
Кремний	$2,32 \cdot 10^{12}$	$7,32 \cdot 10^{12}$	$2,32 \cdot 10^{13}$	$7,32 \cdot 10^{13}$	$2,32 \cdot 10^{14}$	$7,32 \cdot 10^{14}$	$2,32 \cdot 10^{15}$	$7,32 \cdot 10^{15}$	$2,32 \cdot 10^{16}$

Из таблицы 4.1 видно, что большие значения индуктивности достигаются на малых частотах. Для металлов эти частоты заключены в диапазоне от десятков герц (медь) до килогерц (нихром). Для полупроводников такие значения индуктивности достижимы на частотах больше 1 Мгц. Малые значения индуктивности достигаются на высоких частотах. Для металлов это сотни килогерц, а для полупроводников – десятки и тысячи терагерц.

В таблице 4.2 рассчитаны значения частоты  $\nu$  в герцах, которые для объёма цилиндра, равного  $3,14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ , дают значения индуктивности в интервале от 100 мГн до 1 нГн для различных проводящих материалов.

Таблица 4.2

Значения частоты для различных проводящих материалов

	100 мГн	10 мГн	1 мГн	100 мкГн	10 мкГн	1 мкГн	100 нГн	10 нГн	1 нГн
Медь	$4,93 \cdot 10^{-2}$	$1,56 \cdot 10^{-1}$	$4,93 \cdot 10^{-1}$	1,56	4,93	15,6	49,3	156	493
Вольфрам	$1,56 \cdot 10^{-1}$	$4,93 \cdot 10^{-1}$	1,56	4,93	15,6	49,3	156	493	1560
Никель	$1,95 \cdot 10^{-1}$	$6,18 \cdot 10^{-1}$	1,95	6,18	19,5	61,8	195	618	1950
Нихром	3,18	10,1	31,8	101	318	$1,01 \cdot 10^3$	$3,18 \cdot 10^3$	$1,01 \cdot 10^4$	$3,18 \cdot 10^4$
КЭЭФ	$3,18 \cdot 10^3$	$1,01 \cdot 10^4$	$3,18 \cdot 10^4$	$1,01 \cdot 10^5$	$3,18 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^6$	$3,18 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^7$	$3,18 \cdot 10^7$
Германий	$1,5 \cdot 10^6$	$4,73 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^7$	$4,73 \cdot 10^7$	$1,5 \cdot 10^8$	$4,73 \cdot 10^8$	$1,5 \cdot 10^9$	$4,73 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^{10}$
Кремний	$7,32 \cdot 10^9$	$2,32 \cdot 10^{10}$	$7,32 \cdot 10^{10}$	$2,32 \cdot 10^{11}$	$7,32 \cdot 10^{11}$	$2,32 \cdot 10^{12}$	$7,32 \cdot 10^{12}$	$2,32 \cdot 10^{13}$	$7,32 \cdot 10^{13}$

Из таблицы 4.2 видно, что большие значения индуктивности достигаются на малых частотах. Для металлов эти частоты заключены в диапазоне от сотых герца (медь) до герц (нихром). Для полупроводников такие значения индуктивности достижимы на частотах больше 1 КГц. Малые значения индуктивности достигаются на высоких частотах. Для металлов это килогерцы и десятки килогерц, а для полупроводников – десятки и тысячи гигагерц.

В таблице 4.3 рассчитаны значения частоты  $\nu$  в герцах, которые для объёма кольца, с радиусом  $R=50$  мкм, высотой  $h=1$  мкм и радиальной толщиной  $\delta=0,5$  мкм, дают значения индуктивности в интервале от 100 мГн до 1 нГн для различных проводящих материалов (в таблицах материал КЭФ – кремний электронный легированный фосфором с удельным сопротивлением  $\rho=0,1$  ом·см; германий – с удельным сопротивлением  $\rho=47$  ом·см; кремний – с удельным сопротивлением  $\rho=230$  Ком·см).

Из табл. 4.3 видно, что большие значения индуктивности достигаются на малых частотах. Для металлов эти частоты заключены в диапазоне от десятков килогерц (медь) до мегагерц (нихром). Для полупроводников такие значения индуктивности достижимы на частотах больше 1 ГГц. Малые значения индуктивности достигаются на высоких частотах. Для металлов это гигагерцы, а для полупроводников – десятков терагерц до десятков миллионов терагерц.

Таблица 4.3

Значения частоты для различных проводящих материалов  
микроскопического кольца

Материал/ индуктивность	Медь	Вольфрам	Никель	Нихром	КЭФ	Германий	Кремний
100 мГн	$4,96 \cdot 10^4$	$1,56 \cdot 10^5$	$1,96 \cdot 10^5$	$3,20 \cdot 10^6$	$3,20 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^{12}$	$7,36 \cdot 10^{15}$
10 мГн	$1,57 \cdot 10^5$	$4,95 \cdot 10^5$	$6,21 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^7$	$1,01 \cdot 10^{10}$	$4,75 \cdot 10^{12}$	$2,33 \cdot 10^{16}$
1 мГн	$4,96 \cdot 10^5$	$1,56 \cdot 10^6$	$1,96 \cdot 10^6$	$3,20 \cdot 10^7$	$3,20 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^{13}$	$7,36 \cdot 10^{16}$
100 мкГн	$1,57 \cdot 10^6$	$4,95 \cdot 10^6$	$6,21 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^8$	$1,01 \cdot 10^{11}$	$4,75 \cdot 10^{13}$	$2,33 \cdot 10^{17}$
10 мкГн	$4,96 \cdot 10^6$	$1,56 \cdot 10^7$	$1,96 \cdot 10^7$	$3,20 \cdot 10^8$	$3,20 \cdot 10^{11}$	$1,5 \cdot 10^{14}$	$7,36 \cdot 10^{17}$
1 мкГн	$1,57 \cdot 10^7$	$4,95 \cdot 10^7$	$6,21 \cdot 10^7$	$1,01 \cdot 10^9$	$1,01 \cdot 10^{12}$	$4,75 \cdot 10^{14}$	$2,33 \cdot 10^{18}$
100 нГн	$4,96 \cdot 10^7$	$1,56 \cdot 10^8$	$1,96 \cdot 10^8$	$3,20 \cdot 10^9$	$3,20 \cdot 10^{12}$	$1,5 \cdot 10^{15}$	$7,36 \cdot 10^{18}$
10 нГн	$1,57 \cdot 10^8$	$4,95 \cdot 10^8$	$6,21 \cdot 10^8$	$1,01 \cdot 10^{10}$	$1,01 \cdot 10^{13}$	$4,75 \cdot 10^{15}$	$2,33 \cdot 10^{19}$
1 нГн	$4,96 \cdot 10^8$	$1,56 \cdot 10^9$	$1,96 \cdot 10^9$	$3,20 \cdot 10^{10}$	$3,20 \cdot 10^{13}$	$1,5 \cdot 10^{16}$	$7,36 \cdot 10^{19}$

В таблице 4.4 рассчитаны значения частоты  $\nu$  в герцах, которые для объёма кольца с радиусом  $R=500$  мкм, высотой  $h=10$  мкм и радиальной толщиной  $\delta=5$  мкм дают значения индуктивности в интервале от 100 мГн до 1 нГн для различных проводящих материалов.

Таблица 4.4

**Значения частоты для различных проводящих материалов  
микроскопического кольца**

Материал/ индуктивность	Медь	Вольфрам	Никель	Нихром	КЭФ	Германий	Кремний
100 мГн	$1,57 \cdot 10^3$	$4,95 \cdot 10^3$	$6,21 \cdot 10^3$	$1,01 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^8$	$4,75 \cdot 10^{10}$	$2,33 \cdot 10^{14}$
10 мГн	$4,96 \cdot 10^3$	$1,56 \cdot 10^4$	$1,96 \cdot 10^4$	$3,20 \cdot 10^5$	$3,20 \cdot 10^8$	$1,5 \cdot 10^{11}$	$7,36 \cdot 10^{14}$
1 мГн	$1,57 \cdot 10^4$	$4,95 \cdot 10^4$	$6,21 \cdot 10^4$	$1,01 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^9$	$4,75 \cdot 10^{11}$	$2,33 \cdot 10^{15}$
100 мкГн	$4,96 \cdot 10^4$	$1,56 \cdot 10^5$	$1,96 \cdot 10^5$	$3,20 \cdot 10^6$	$3,20 \cdot 10^9$	$1,5 \cdot 10^{12}$	$7,36 \cdot 10^{15}$
10 мкГн	$1,57 \cdot 10^5$	$4,95 \cdot 10^5$	$6,21 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^7$	$1,01 \cdot 10^{10}$	$4,75 \cdot 10^{12}$	$2,33 \cdot 10^{16}$
1 мкГн	$4,96 \cdot 10^5$	$1,56 \cdot 10^6$	$1,96 \cdot 10^6$	$3,20 \cdot 10^7$	$3,20 \cdot 10^{10}$	$1,5 \cdot 10^{13}$	$7,36 \cdot 10^{16}$
100 нГн	$1,57 \cdot 10^6$	$4,95 \cdot 10^6$	$6,21 \cdot 10^6$	$1,01 \cdot 10^8$	$1,01 \cdot 10^{11}$	$4,75 \cdot 10^{13}$	$2,33 \cdot 10^{17}$
10 нГн	$4,96 \cdot 10^6$	$1,56 \cdot 10^7$	$1,96 \cdot 10^7$	$3,20 \cdot 10^8$	$3,20 \cdot 10^{11}$	$1,5 \cdot 10^{14}$	$7,36 \cdot 10^{17}$
1 нГн	$1,57 \cdot 10^7$	$4,95 \cdot 10^7$	$6,21 \cdot 10^7$	$1,01 \cdot 10^9$	$1,01 \cdot 10^{12}$	$4,75 \cdot 10^{14}$	$2,33 \cdot 10^{18}$

Из табл. 4.4 также видно, что большие значения индуктивности достигаются на малых частотах. Для металлов эти частоты заключены в диапазоне от килогерца (медь) до сотен килогерц (нихром). Для полупроводников такие значения индуктивности достижимы на частотах больше 100 Мгц. Малые значения индуктивности достигаются на высоких частотах. Для металлов это десятки и тысячи мегагерц, а для полупроводников – единицы и миллионы терагерц.

Один из возможных вариантов экспериментальных исследований эффекта вносимой индуктивности в планарных кольцевых технологиях – использование системы «проводящая наноплёнка в токовом кольце», изложенная в разделе 6.

#### 4.1.6. Выводы по разделу 4.1

- Предложен аналитический метод расчёта индукционных и индуктивных свойств проводящего немагнитного цилиндра с полостью произвольной высоты с азимутальной плотностью вихревого тока.
- Метод основан на решении первого уравнения Максвелла для цилиндрической симметрии исследуемых электромагнитных полей, в которых между током и потоком может существовать конечный фазовый сдвиг.
- Получены радиальные распределения азимутальной компоненты напряжённости вихревого электрического поля, плотности токов Фуко и удельной тепловой мощности, выделяемой в локальной области проводника.
- Определены зависимости среднего значения ЭДС в цилиндре, индукционного тока и интегрального омического сопротивления от приведённого радиуса полости цилиндра.
- Получена формула для вычисления вносимой индуктивности проводящего цилиндра.

- Её зависимость от приведённого радиуса полости проводящего цилиндра, квадрата удельного сопротивления, квадрата частоты переменного тока и объёма позволяет изменять вносимую индуктивность в широком диапазоне значений.
- Оценки, проведённые для существующих проводников и полупроводников, указывают на то, что больших значений индуктивности можно добиться на низких частотах для материалов с малым удельным сопротивлением и малых значений индуктивности – на СВЧ и КВЧ для материалов с большим удельным сопротивлением.

## **4.2. Учёт влияния диамагнитных свойств токов Фуко и омических потерь на значение вносимой индуктивности**

В разделе 4.1 исследованы индуктивные свойства проводящего цилиндра с азимутальной напряжённостью вихревого электрического поля. Ниже предлагается обобщение результатов раздела 4.1 на случай наличия омических потерь в системе. Проводится анализ влияния свойств ослабления магнитного поля токами Фуко на величину вносимой индуктивности. Исследуется проблема получения больших индуктивностей в малом объёме на низких частотах в цилиндрических плёнках.

### **4.2.1. Физико-математическая модель расчёта**

Предположим, что сплошной проводящий немагнитный цилиндр находится во внешнем однородном переменном магнитном поле, направленном по оси  $z$ ,  $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ . Его зависимость во времени имеет вид

$$B_z = B_0 \cos \omega t, \quad (4.51)$$

где  $B_0 = \text{const}$  не зависит от цилиндрических координат системы и ограничено в радиальном направлении внешним радиусом цилиндра  $R$ , а в аксиальном направлении произвольной высотой цилиндра, обозначенной через  $h$ .

При такой ориентации переменное магнитное поле, как и в разделе 1, порождает в цилиндре вихревое электрическое поле, напряженность которого  $\vec{E} = (0, E_\varphi, 0)$  также имеет одну компоненту.

Компоненты полей связаны между собой первым уравнением Максвелла, записанным в проекциях

$$(\text{rot} \vec{E})_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (4.52)$$

Полагая в (4.52), что фаза вихревого электрического поля совпадает по фазе со скоростью изменения магнитного поля

$$E_{\varphi} = E_0(r) \sin \omega t, \quad (4.53)$$

из уравнения (4.53) получим уравнение, связывающее  $E_0(r)$  и  $B_0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_0) = \omega B_0. \quad (4.54)$$

Его решение для  $E_0(r)$  имеет вид

$$E_0(r) = \omega B_0 r / 2 + C_1 / r. \quad (4.55)$$

В решении (4.55) избавимся от особенности при  $r \rightarrow 0$ , полагая  $C_1=0$ . Из (4.55) видно, что азимутальная компонента вектора напряженности вихревого электрического поля – линейная функция радиуса  $r$  с масштабом

$$E_* = \omega B_0 R / 2 = \pi f B_0 R. \quad (4.56)$$

В масштабе напряжённости учтено соотношение  $\omega = 2\pi f$ . Тогда (4.55) с учётом (4.56) имеет вид

$$E_0(r) = E_* r / R \text{ при } 0 \leq r \leq R. \quad (4.57)$$

Вихревое электрическое поле в проводящем цилиндре создает вихревые токи Фуко, плотность тока которых имеет такое же направление в пространстве  $\vec{j} = (0, j_{\varphi}, 0)$ . Плотность токов Фуко рассчитывается из дифференциального закона Ома

$$j_{\varphi} = E_{\varphi} / \rho, \quad (4.58)$$

где  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление проводящего цилиндра.

Из (4.58) видно, что плотность тока Фуко в однородной проводящей среде  $\rho = \text{const}$  также является линейной функцией радиуса и также зависит от времени, как и  $E_{\varphi}$

$$j_{\varphi} = j_0(r) \sin \omega t, \quad (4.59)$$

где  $j_0(r)$  связано с масштабом плотности тока

$$j_* = \pi f B_0 R / \rho \quad (4.60)$$

соотношением

$$j_0(r) = j_* r / R. \quad (4.61)$$

Из соотношения (4.60) видно, что при прочих равных условиях масштаб тока может достигать больших значений на высоких частотах для проводящей среды с малым значением удельного сопротивления  $\rho$ . Это будет приводить к нагреву проводящего цилиндра на высокой частоте.

Удельная тепловая мощность, выделяемая в локальной области проводника при протекании токов Фуко, рассчитывается из закона Джоуля Ленца:

$$p_v = \rho j_{\varphi}^2 = p_* \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \omega t, \quad (4.62)$$

где

$$p_* = \rho j_*^2 = \pi^2 f^2 B_0^2 R^2 / \rho \quad (4.63)$$

– масштаб объемной плотности тепловой мощности.



Как видно из (4.63), удельная мощность уже пропорциональна квадрату частоты и для проводящей среды с произвольным значением удельного сопротивления оказывается наиболее значительным на внешней границе цилиндра. Это может приводить к выгоранию его внешней боковой поверхности на высокой частоте.

Тепловая мощность, выделяемая во всём цилиндре, находится из (4.62)

$$P = \int_V p_v dv = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^R p_v(r, \varphi, z) r dz dr d\varphi = P_* \sin^2 \omega t, \quad (4.64)$$

где масштаб тепловой мощности имеет вид

$$P_* = p_* \pi R^2 h / 2 = \pi^3 f^2 B_0^2 R^4 h / (2\rho). \quad (4.65)$$

Вихревой ток, индуцированный во всём цилиндре, может быть получен из интегрирования потока

$$i = \int_S \vec{j} d\vec{s} = \int_0^h \int_0^R j_\varphi dr dz = i_* \sin \omega t, \quad (4.66)$$

где

$$i_* = j_* h R / 2 = \pi f B_0 h R^2 / (2\rho) \quad (4.67)$$

– масштаб индукционного тока. Заметим, что полученные результаты можно получить из соотношений, полученных в разделе 4.1 и предельным переходом при  $r_1 \rightarrow 0$ .

#### 4.2.2. Частичный учёт магнитных свойств токов Фуко

Вихревая плотность токов Фуко (4.59) создаёт в пространстве цилиндра собственное магнитное поле  $\vec{B}_1$ . Это магнитное поле отклика вещества для исходной ориентации вихревых токов в цилиндрической системе координат имеет две проекции  $B_{1r}$  и  $B_{1z}$ . Направление проекции  $B_{1z}$  во всех точках цилиндра противоположно внешнему магнитному полю  $B_0$ . Предполагая, что компонента  $B_{1r}$  не зависит от координаты  $z$ , распределение собственного магнитного поля можно рассчитать из второго уравнения Максвелла, записанного в проекциях (частная производная компоненты  $B_{1r}$  по переменной  $z$  опущена):

$$(\text{rot } \vec{B}_1)_\varphi = -\frac{\partial B_{1z}}{\partial r} = \mu_0 j_\varphi. \quad (4.68)$$

Интегрируя (4.68) для начального условия  $B_{1z}(0)$  с учётом (4.59), получим

$$B_{1z} = -B_{1*} (r/R)^2 \sin \omega t, \quad (4.69)$$

где

$$B_{1*} = \mu_0 j_* R / 2 \quad (4.70)$$

масштаб индукции собственного магнитного поля. Его можно связать с индукцией внешнего магнитного поля безразмерным параметром  $\beta$

$$B_{1*} = \beta B_0, \quad (4.71)$$

который указывает на влияние диамагнетизма токов Фуко

$$\beta = \frac{\mu_0 \pi R^2 f}{2\rho} = \frac{f}{f_*}, \quad (4.72)$$

где

$$f_* = 2\rho / (\mu_0 \pi R^2) \quad (4.73)$$

- масштаб частоты системы. Из (4.72) видно, что диамагнетизм слабо проявляет себя при  $\beta \rightarrow 0$  и его влияние велико на высоких частотах, когда  $\beta \gg 1$ . При значении  $\beta=1$  масштабы индукций магнитных полей одинаковы.

Поскольку современные материалы от проводников до собственных полупроводников имеют удельное сопротивление, изменяющееся в диапазоне  $15,5 \text{ нОм} \cdot \text{м} < \rho < 2,3 \text{ кОм} \cdot \text{м}$ , то формула для расчета масштаба частоты (4.73) даёт широкие возможности для ее изменения.

В таблице 4.5 приведены значения масштаба частоты для восьми проводящих материалов. Значения удельного сопротивления взяты из справочника [58].

Таблица 4.5

Масштаб частоты для материалов с различным удельным сопротивлением для радиуса цилиндра  $R=2 \text{ мм}$

N п/п	Материал	Удельное сопротивление (Ом·м)	Масштаб частоты $f_*$ , Гц
1	Медь	$15,5 \cdot 10^{-9}$	$1,96 \cdot 10^3$
2	Вольфрам	$48,9 \cdot 10^{-9}$	$16,2 \cdot 10^3$
3	Никель	$61,4 \cdot 10^{-9}$	$7,78 \cdot 10^3$
4	Латунь (марг.)	$2,12 \cdot 10^{-7}$	$26,9 \cdot 10^3$
5	Нихром	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$1,27 \cdot 10^5$
6	КЕФ (кремний электронный)	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,27 \cdot 10^8$
7	Германий	0,47	$5,95 \cdot 10^{10}$
8	Кремний	$2,3 \cdot 10^3$	$2,91 \cdot 10^{14}$

Как видно из таблицы 4.5, масштаб частот современных материалов лежит в широком диапазоне частот от  $2 \cdot 10^3$  до  $3 \cdot 10^{14}$  Гц.

### 4.2.3. Энергетический баланс системы

Средняя за период  $T$  изменения поля магнитная энергия, поступающая в цилиндр, находится из интегрирования

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{V_0} \frac{(\vec{B})^2}{2\mu_0} dV dt, \quad (4.74)$$

где результирующая индукция магнитного поля системы

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1. \quad (4.75)$$

Тогда  $\langle W \rangle$  состоит из двух слагаемых: средней за период энергии внешнего поля

$$\langle W_0 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{B_0^2}{2\mu_0} r d\varphi dr dz dt = \frac{B_0^2 \pi R^2 h}{4\mu_0}. \quad (4.76)$$

и средней энергии собственного магнитного поля

$$\langle W_1 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{B_{1*}^2 r^4}{2\mu_0 R^4} r d\varphi dr dz dt = \frac{B_0^2 \pi R^2 h}{4\mu_0} \frac{\beta^2}{3}. \quad (4.77)$$

Интегрирование за период скалярного произведения  $2\vec{B}_0\vec{B}_1$  обращается в нуль из-за наличия фазового сдвига  $\pi/2$  между индукциями  $B_1$  и  $B_0$ . В связи с этим между переменными полями  $B_1$  и  $B_0$  возникает своеобразная интерференция, которая и суммирует обе энергии

$$\langle W \rangle = \langle W_0 \rangle + \langle W_1 \rangle. \quad (4.78)$$

Вносимая за период магнитная энергия (4.78) расходуется на нагрев проводящего цилиндра  $W_q$  и ту часть энергии, которая запасается в индуктивность системы

$$\langle W \rangle = W_q + L \langle i^2 \rangle / 2. \quad (4.79)$$

Заметим, что в соотношении (4.529) не учтена магнитная энергия, которая поставляется в систему радиальной компонентой магнитного поля отклика вещества  $B_{1r}$ . Её влияние на процессы дополнительной генерации энергии магнитного поля будут учтены в следующем разделе.

Тепловая энергия, расходуемая на нагрев цилиндра за период, вычисляется интегрированием по времени (4.64)

$$W_q = \int_0^T P dt = \frac{P_*}{2f} = 2\pi\beta \langle W_0 \rangle. \quad (4.80)$$

Среднее за период значение квадрата тока найдём из (4.66)

$$\langle i^2 \rangle = i_*^2 / 2. \quad (4.81)$$

#### 4.2.4. Индуктивные свойства сплошного немагнитного цилиндра

Подставляя в (4.78) и (4.79) вычисленные энергии, получим для приведённой индуктивности цилиндра соотношение

$$\frac{L}{L_*} = (1 + \beta^2 / 3 - 2\pi\beta) / \beta^2, \quad (4.82)$$

где

$$L_* = \mu_0 \pi R^2 / h \quad (4.83)$$

– масштаб индуктивности, который может принимать большие значения для аксиально тонких плёнок при выполнении условия  $h/R \ll 1$ .

Как видно из (4.82), индуктивность проводящего цилиндра обращается в нуль на двух характеристических частотах  $F_1$  и  $F_2$  ( $F_1 < F_2$ ):

$$\frac{F_1}{f_*} = \beta_1 = 3\pi \left(1 - \sqrt{1 - 1/(3\pi^2)}\right) \approx 0,1605. \quad (4.84)$$

$$\frac{F_2}{f_*} = \beta_2 = 3\pi \left(1 + \sqrt{1 - 1/(3\pi^2)}\right) \approx 18,69. \quad (4.85)$$

Нули индуктивности делят весь частотный интервал на три части: низкочастотный (выполнено условие  $0 < \beta < \beta_1$ ), в котором индуктивность принимает положительные значения; среднечастотный, в котором индуктивность принимает отрицательные значения (выполнено условие  $\beta_1 < \beta < \beta_2$ ) и высокочастотный, в котором она снова принимает положительное значение (выполнено условие  $\beta_2 < \beta < \infty$ ).

Как видно из (4.82), в низкочастотном диапазоне индуктивность при  $\beta \rightarrow 0$  (диамагнетизм токов и омические потери небольшие) может принимать положительные, большие, по сравнению с масштабом, значения, зависящие от частоты по закону

$$L / L_* \sim \beta^{-2}. \quad (4.86)$$

Этот результат представляет интерес для создания больших индуктивностей на низких частотах в малом объёме. При  $\beta \ll 1$  формула (4.86) переходит в формулу (4.38) при  $r_l = 0$

$$L = 4\rho^2 / (\mu_0 v^2 V) \quad (4.87)$$

и определяет пределы применимости полученных в ней результатов.

#### 4.2.5. Оценки вносимой индуктивности цилиндра в низкочастотной области

Исследуем возможности увеличения индуктивности в низкочастотной области за счёт уменьшения частоты переменного поля  $f$ .

Сплошной цилиндр из марганцовистой латуни будет иметь положительную индуктивность ( $\rho = 2,12 \cdot 10^{-7}$  Ом·м) при геометрических размерах  $R = 2$  мм,  $h = 1$  см (выполнено условие  $h/R > 1$ ). Масштаб частоты  $f_* = 2,69 \cdot 10^4$  Гц. Масштаб индуктивности  $L_* = 1,58$  нГн. Первый нуль индуктивности находится на первой характеристической частоте  $F_1 = 0,1605 f_* = 4,3$  кГц. В таблице 4.6 приведём значения индуктивности цилиндра, которые могут быть реализованы на частотах меньших первой характеристической частоты в целое число раз.

Таблица 4.6

Зависимость индуктивности от частоты для условия  $h/R > 1$

F(частота)	$L/L_*$	$L$ (микрогенри)
$F_1/2$	77,3	0,122
$F_1/3$	232	0,366
$F_1/4$	464	0,734
$F_1/5$	775	1,22
$F_1/6$	$1,16 \cdot 10^3$	1,84
$F_1/7$	$1,63 \cdot 10^3$	2,57
$F_1/8$	$2,17 \cdot 10^3$	3,43
$F_1/9$	$2,80 \cdot 10^3$	4,41
$F_1/10$	$3,49 \cdot 10^3$	5,51

Как видно из табл. 4.6, увеличение индуктивности за счёт уменьшения омических потерь и влияния диамагнитных свойств токов Фуко может быть в сорок пять раз больше в диапазоне изменения частоты переменного магнитного поля от 0,43 кГц до 2,15 кГц.

Сделаем оценки индуктивности, представляющие интерес для планарных технологий, при выполнении условия  $h/R < 1$ . Для тонкой плёнки  $h=1$  мкм и радиусом  $R=1$  см, выполненной из электронного кремния (см. табл. 4.7), имеем: масштаб частоты  $f_*=5,07 \cdot 10^{10}$  Гц. Масштаб индуктивности  $L_*=39,5$  нГн. Первый нуль индуктивности находится на первой характеристической частоте  $F_1=0,1605f_*=8,14$  ГГц. В табл. 4.7 приведём значения индуктивности цилиндра, которые могут быть реализованы на частотах меньших первой характеристической частоты в целое число раз в диапазоне от 0,81 ГГц до 4,07 ГГц.

Таблица 4.7

Зависимость индуктивности от частоты для условия  $h/R < 1$ .

F(частота)	$L/L_*$	$L$ (микрогенри)
$F_1/2$	77,3	3,05
$F_1/3$	232	9,17
$F_1/4$	464	18,4
$F_1/5$	775	30,6
$F_1/6$	$1,16 \cdot 10^3$	45,9
$F_1/7$	$1,63 \cdot 10^3$	64,3
$F_1/8$	$2,17 \cdot 10^3$	85,7
$F_1/9$	$2,80 \cdot 10^3$	110
$F_1/10$	$3,49 \cdot 10^3$	138

Применение плёнки из того же материала с той же толщиной, но радиусом в 1 см даёт масштаб частоты  $f^*=5,07 \cdot 10^6$  Гц. Масштаб индуктивности  $L^*=0,39$  мГн. Первый нуль индуктивности находится на первой характеристической частоте  $F_1=0,1605f^*=0,81$  МГц. Значения индуктивности изменяются в диапазоне от 30 мГн до 1,4 Гн в интервале изменения частоты от 81 кгц до 0,4 МГц.

#### 4.2.6. Оценки отрицательной вносимой индуктивности в среднечастотной области

На рис. 4.11 представлена частотная зависимость индуктивности, рассчитанная по соотношению (4.82). Пределы изменения частоты выбраны так, чтобы вносимая индуктивность изменялась в пределах 10-и масштабов индуктивности в положительную и отрицательную сторону. Как видно из рис. 4.11, индуктивность обращается в нуль на первой характеристической частоте.

Проведём расчёты минимального значения отрицательной индуктивности. Минимальное значение индуктивности  $L_{\min}$  приходится на значение приведённой частоты  $\beta_0 = 1/\pi$ .

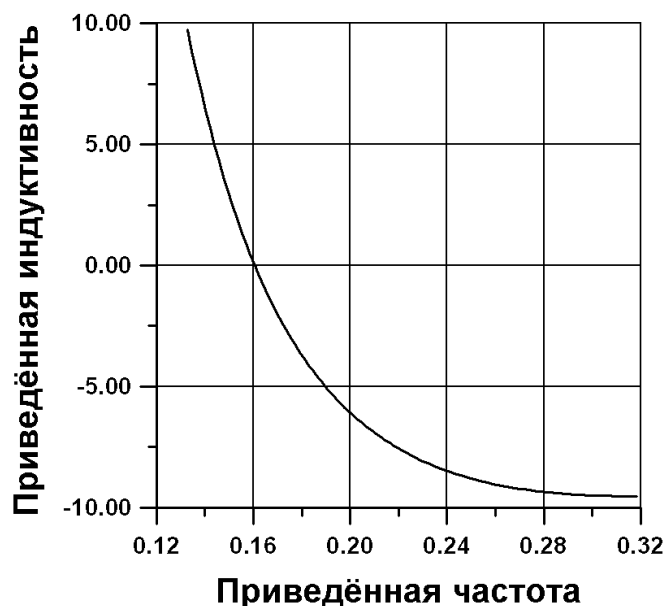


Рис. 4.11. Зависимость приведённой индуктивности от приведённой частоты

В таблице 4.8 приведены минимальные значения отрицательной индуктивности  $-L_{\min}$ , которые можно реализовать на медной цилиндрической плёнке толщиной  $h=2$  мкм. При этом радиус плёнки  $R$  изменялся от 10 до 100 мкм. В эту же таблицу сведены основные

масштабы исследуемых величин, а также частоты  $f_{\min}$ , на которых реализуются эти параметры.

Таблица 4.8

Зависимость минимального значения индуктивности от радиуса  
медной плёнки

$R$ (мкм)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$L^*$ (нГн)	0,197	0,790	1,78	3,16	4,93	7,11	9,67	12,6	16,0	19,7
$f_{\min}$ (МГц)	25,0	6,25	2,78	1,56	1,0	0,69	0,51	0,39	0,31	0,25
$-L_{\min}$ (нГн)	1,88	7,53	16,9	30,1	47,1	67,8	92,3	121	153	188
$\rho_L$ (МГн/ м <sup>3</sup> )	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0

Из табл. 4.8. видно, что при изменении радиуса медной плёнки от 10 до 100 мкм её рабочая частота изменяется в диапазоне от 25 МГц до 250 кГц. При таких значениях радиуса удаётся получить минимальной значение отрицательной индуктивности, лежащее в диапазоне от 2 до 188 нГн. При этом для всех радиусов реализуется постоянная объёмная плотность индуктивности с достаточно большим значением 3,0 МГн/м<sup>3</sup>. Причина постоянства объёмной плотности заключается в том, что она определяется только квадратом толщины плёнки. При расчёте таблицы 4.8 толщина плёнки не изменялась. Её увеличение в 4 раза приведёт к уменьшению объёмной плотности индуктивности в 16 раз.

В табл. 4.9 приведены те же самые расчёты, но для микроплёнки, выполненной из углеродистой латуни.

Таблица 4.9

Зависимость минимального значения индуктивности от радиуса  
плёнки из углеродистой латуни

$R$ (мкм)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$L^*$ (нГн)	0,197	0,790	1,78	3,16	4,93	7,11	9,67	12,6	16,0	19,7
$f_{\min}$ (МГц)	342	85,5	38,0	21,4	13,7	9,5	6,9	5,3	4,2	3,4
$-L_{\min}$ (нГн)	1,88	7,53	16,9	30,1	47,1	67,8	92,3	121	153	188

Из табл. 4.9. видно, что при изменении радиуса плёнки из углеродистой латуни от 10 до 100 мкм её рабочая частота изменяется уже в диапазоне от 342 МГц до 3,4 МГц. При таких значениях радиуса удаётся получить такое же минимальное значение отрицательной индуктивности, лежащее в диапазоне от 2 до 188 нГн. При этом для всех радиусов также реализуется постоянная объёмная плотность индуктивности со значением  $3,0 \text{ МГн/м}^3$ .

В табл. 4.10 приведены такие же расчёты для микронной плёнки, выполненной из электронного кремния.

Таблица 4.10

Зависимость минимального значения индуктивности от радиуса плёнки из электронного кремния

$R$ (мкм)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$L^*$ (нГн)	0,197	0,790	1,78	3,16	4,93	7,11	9,67	12,6	16,0	19,7
$f_{\min}$ (ГГц)	1610	403	179	101	64,5	44,8	32,9	25,2	19,9	16,1
$-L_{\min}$ (нГн)	1,88	7,53	16,9	30,1	47,1	67,8	92,3	121	153	188

Как видно из табл. 4.10, достигаемый диапазон изменения минимальной индуктивности остался тем же самым, а рабочие частоты лежат уже в КВЧ-диапазоне от 16,1 до 1610 ГГц.

#### 4.2.7. Оценки вносимой индуктивности в крайне высокочастотной области

Отличительным свойством вносимой индуктивности является то, что на очень высоких частотах она становится снова положительной, перестаёт зависеть от частоты и не имеет частоты среза. Крайне высокие частоты определяются параметром приведённой частоты (4.72). При выполнении условия  $f_{\text{КВЧ}} \geq 20 f_*$  частоту можно считать принадлежащей диапазону КВЧ. Она будет зависеть от удельного сопротивления металла, из которого она сделана.

При выполнении этого условия сама индуктивность (4.82) уже зависит только от геометрических размеров

$$L = \mu_0 \pi R^2 / (3h).$$

В табл. 4.11 представлены вычисления, проведённые по последнему соотношению для плёнок с микронным радиусом и одинаковой толщиной  $h=2$  мкм на КВЧ.



Таблица 4.11

Зависимость вносимой индуктивности на КВЧ  
от радиуса плёнки

$R$ (мкм)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$L^*$ (нГн)	0,197	0,790	1,78	3,16	4,93	7,11	9,67	12,6	16,0	19,7
$L_{КВЧ}$ (нГн)	0,066	0,263	0,592	1,05	1,64	2,37	3,22	4,21	5,33	6,58
$f_{КВЧ}$ ГГц, медь	1,57	0,39	0,18	0,098	0,063	0,044	0,032	0,025	0,019	0,016
$f_{КВЧ}$ ГГц, латунь	21,5	5,37	2,39	1,34	0,86	0,59	0,44	0,34	0,27	0,22
$f_{КВЧ}$ ТГц, крем- ний	101	25,3	11,3	6,33	4,05	2,81	2,07	1,58	1,25	1,01
$\rho_L$ (МГн/ м <sup>3</sup> )	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Как видно из табл. 4.11, индуктивность на КВЧ зависит от частоты и удельного сопротивления материала. А масштаб индуктивности и само значение индуктивности зависит только от геометрических размеров цилиндрической плёнки (4.88). Важнейшей особенностью для управления таким значением индуктивности остается изменение геометрических размеров самой плёнки. Уменьшение её толщины будет приводить к росту рассчитанных значений индуктивности.

#### 4.2.8. Полный учёт магнитных свойств токов Фуко и их влияние на частотную зависимость индуктивности

В разделе 4.1 был проведён частичный учёт магнитных свойств токов Фуко. Он заключался в том, что вихревая плотность токов Фуко создаёт в пространстве цилиндра собственное магнитное поле отклика вещества. Это магнитное поле в цилиндрической системе координат имеет две проекции  $B_{1r}$  и  $B_{1z}$ . Действие проекции  $B_{1z}$  было учтено полностью, а исследование влияния проекции индукции магнитного поля  $B_{1r}$  было опущено.

Проведём полный учёт магнитных свойств токов Фуко. Для этого введём обозначения:  $B_{1r}=B_2$  – радиальная компонента индукции, а  $B_{1z}=B_1$  – аксиальная компонента индукции. Тогда индукция магнитного поля,

возникающая в цилиндре, определяется в его каждой точке суперпозицией индукций трёх полей

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \vec{B}_2, \quad (4.88)$$

векторы которых в каждой точке цилиндра ортогональны (см. рис. 4.12).

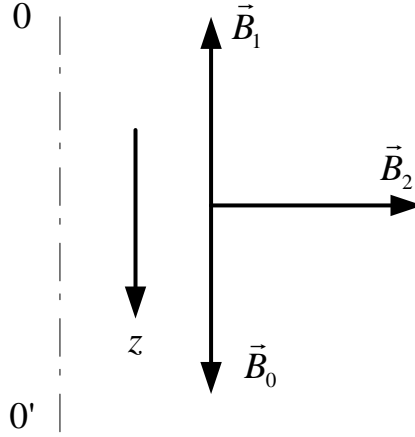


Рис. 4.12. Расположение векторов магнитной индукции исходного поля и полей отклика относительно оси цилиндра  $OO'$

В связи с этим, уравнение (4.68) перепишем в виде

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial B_1}{\partial r} = \mu_0 j_\phi. \quad (4.89)$$

Считая, что все поля системы зависят только от радиуса  $r$ , а  $\partial/\partial z = 0$ , приходим к уравнению (4.68), из которого можно рассчитать радиальное распределение индукции магнитного поля  $B_1$

$$B_1 = -B_{1*}(r/R)^2 \sin \omega t, \quad (4.90)$$

где масштаб индукции  $B_{1*}$  определён в (4.70). При этом связь  $B_1$  с  $B_0$  не изменяется и описывается (4.71) с учётом (4.73).

Радиальная компонента  $B_2(r)$  не может быть определена из системы записанных уравнений. Будем считать её неизвестной функцией, но учтём её относительный вклад в энергию магнитного поля системы в качестве ещё одного независимого параметра.

Тогда средняя за период  $T$  магнитная энергия, поступающая в цилиндр (4.74) может быть представлена в виде трёх слагаемых

$$\langle W \rangle = \langle W_0 \rangle + \langle W_1 \rangle + \langle W_2 \rangle, \quad (4.91)$$

где первое и второе слагаемое определены в (4.76) и (4.77), а последнее слагаемое представляет собой неизвестную функцию, имеющую вид

$$\langle W_2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi R} \int_0^h \int_0^T \int_0^{2\pi} \frac{B_2^2}{2\mu_0} r d\phi dr dz dt. \quad (4.92)$$

Заметим, что при вычислении интеграла (4.74) возникают перекрёстные слагаемые

$$B^2 = B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 + 2\vec{B}_0\vec{B}_1 + 2\vec{B}_2\vec{B}_1 + 2\vec{B}_0\vec{B}_2. \quad (4.93)$$

Последние три обращаются в нуль по разным причинам: пятое слагаемое за счёт ортогональности векторов  $B_1$  и  $B_2$  (см. рис. 4.11); четвёртое и шестое слагаемые за счёт сдвига фаз по времени на  $\pi/2$ .

Считая вклад усреднённого значения  $\langle W_2 \rangle$  конечным, запишем энергетический баланс в системе в виде (сравни с (4.79))

$$\frac{B_0^2 \pi R^2 h}{4\mu_0} + \frac{B_{1*}^2 \pi R^2 h}{12\mu_0} + \frac{1}{4\mu_0} \int_V B_2^2 dV = W_q + \frac{L \langle i^2 \rangle}{2}. \quad (4.94)$$

Подставляя в (4.94) вычисленные значения энергии, получим новую частотную зависимость приведённой индуктивности цилиндра, которая зависит от относительного энергетического вклада радиальной компоненты

$$1 + \beta^2 / 3 + \alpha = 2\pi\beta + \beta^2 \frac{L}{L_*}, \quad (4.95)$$

где второй независимый параметр системы  $\alpha$

$$\alpha = \int_V B_2^2 dV / (B_0^2 \pi R^2 h) \quad (4.96)$$

есть относительный положительный вклад радиальной компоненты в индуктивность сплошного проводящего цилиндра.

Как видно из (4.95) этот вклад приводит к изменению положения характеристических частот  $F_1$  и  $F_2$  индуктивности сплошного цилиндра. Положение первого корня зависит от параметра  $\alpha$  по закону

$$\beta_1 = 3\pi - \sqrt{9\pi^2 - 3(1 + \alpha)}, \quad (4.97)$$

а положение второго корня

$$\beta_2 = 3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 3(1 + \alpha)}. \quad (4.98)$$

Нуль дискриминанта уравнения (4.95) указывает на то, что при равенстве

$$\alpha = \alpha_0 = 3\pi^2 - 1 \quad (4.99)$$

корни частотной зависимости равны друг другу, а индуктивность проводящего цилиндра в этой точке обращается в нуль.

Это приводит к тому, что при небольшом относительном вкладе радиальной компоненты в магнитную энергию цилиндра (параметр  $\alpha$  изменяется в области  $0 < \alpha < \alpha_0 = 28,6088132$ ) есть частоты, на которых индуктивность может принимать отрицательные значения. А при выполнении неравенства  $\alpha > \alpha_0$  (вклад радиальной компоненты в магнитную энергию цилиндра велик) у частотной зависимости индуктивности корней нет, а индуктивность цилиндра положительна для любых частот.

В табл. 4.12 дана зависимость приведённых характеристических частот индуктивности (4.84) и (4.85) от параметра  $\alpha$ .

Таблица 4.12

Зависимость корней частотной зависимости индуктивности  
от параметра  $\alpha$

$\alpha$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
$\beta_1$	0,160	0,660	1,189	1,755	2,366	3,035	3,783	4,647	5,706	7,228
$\beta_2$	18,69	18,19	17,66	17,09	16,48	15,81	15,06	14,20	13,14	11,62

Из табл. 4.12 видно, что с ростом  $\alpha$  корни частотной зависимости приближаются друг к другу. Это уменьшает частотный интервал, в котором индуктивность проводящего цилиндра может принимать отрицательные значения.

Поскольку значение параметра  $\alpha$  неизвестно, то можно предложить способ его определения из экспериментальных данных при наличии участка с отрицательной индуктивностью. Для этого измерения частотной зависимости индуктивности проводят так, чтобы выяснить местоположения нулей. Полученные значения частот, при которых индуктивность проводящего цилиндра обращается в нуль, относят к масштабу частоты (4.73). По полученным значениям корней  $\beta_1$  и  $\beta_2$  определяют пригодность предложенного метода, проверяя связь

$$\beta_1 + \beta_2 = 6\pi. \quad (4.100)$$

Если значение суммы корней (4.100) близко к  $6\pi$ , то можно вычислять параметр  $\alpha$ , а стало быть, и неизвестный вклад радиальной компоненты из соотношения

$$\alpha = 1 - 3\pi^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2 / 12. \quad (4.101)$$

Результаты раздела опубликованы в работах [53-56].

### 4.3. Выводы по разделу 4.2

- Предложен аналитический метод расчёта индуктивных свойств сплошного проводящего немагнитного цилиндра произвольной высоты и радиуса с азимутальной плотностью вихревого тока при наличии омических потерь и магнитных свойств токов Фуко.
- Получены радиальные распределения азимутальной компоненты напряжённости вихревого электрического поля, плотности токов Фуко и удельной тепловой мощности, выделяемой в локальной области проводящего цилиндра.
- Из энергетических соображений получена формула для вычисления вносимой индуктивности сплошного проводящего цилиндра.
- Показано, что индуктивность проводящего цилиндра обращается в нуль для двух характеристических частот  $F_1$  и  $F_2$ .
- Нули индуктивности делят интервал частот на три части: низкочастотный, среднечастотный и высокочастотный.

- На низких и высоких частотах индуктивность проводящего цилиндра принимает положительные значения, а на средних частотах индуктивность отрицательна.
- Показано, что вносимая индуктивность зависит от частоты и имеет большие абсолютные значения в диапазоне низких частот.
- Оценки, проведённые для латунного цилиндра в диапазоне низких частот, при выполнении условия  $h/R > 1$  указывают на то, что большие положительные значения индуктивности латуни на уровне 1 мкГн, отличающиеся в 45 раз можно добиться в интервале частот от 0,43 кГц до 2,15 кГц.
- Оценки, проведённые для плёнки из электронного кремния в диапазоне низких частот, при выполнении условия  $h/R \ll 1$  указывают на то, что большие значения индуктивности на уровне 50 мкГн, отличающиеся в 45 раз можно добиться в интервале частот от 0,81 ГГц до 4,07 ГГц.
- В среднечастотном диапазоне для проводящих и полупроводящих плёнок толщиной 2 мкм при изменении их радиуса в диапазоне от 10 мкм до 100 мкм удаётся получить диапазон отрицательных индуктивностей от  $-2$  до  $-190$  нГн, с большим значением объёмной плотности индуктивности  $3,0$  МГн/м<sup>3</sup>.
- В диапазоне КВЧ вносимая индуктивность снова становится положительной. Индуктивность на КВЧ зависит от частоты и удельного сопротивления материала. А масштаб индуктивности и само значение индуктивности зависит только от геометрических размеров цилиндрической плёнки. При изменении радиуса плёнки в диапазоне от 10 мкм до 100 мкм для толщины плёнки 2 мкм можно получить значения индуктивностей от 0,07 до 6,6 нГн. Важнейшей особенностью для управления таким значением индуктивности остаётся толщина плёнки. Уменьшение её значений будет приводить к росту рассчитанных значений индуктивности.
- Учёт полного влияния магнитных свойств токов Фуко приводит к тому, что характеристические частоты системы могут зависеть от относительного вклада в магнитную энергию цилиндра радиальной компоненты магнитного поля отклика вещества.
- При малом относительном вкладе радиальной компоненты ( $\alpha < \alpha_0$ ) на частотной зависимости индуктивности всегда есть область, в которой она принимает отрицательные значения.
- При большом относительном вкладе радиальной компоненты ( $\alpha > \alpha_0$ ) возможно отсутствие области с отрицательными значениями индуктивности.
- Предложен метод измерений частотной зависимости индуктивности, имеющей отрицательную область, по которой можно определить относительный вклад радиальной компоненты в общее поле системы.

- Одним из существенных недостатков предлагаемой физико-математической модели вносимой (динамической) индуктивности является тот факт, что на сверхнизких частотах, по сравнению с масштабом частоты, индуктивность имеет неустранимую особенность.
- Физические причины этого заключаются в том, что на сверхнизких частотах индуцированный за счёт электромагнитной индукции квадрат токов Фуко оказывается пропорционален квадрату частоты. Поскольку динамическая индуктивность есть коэффициент пропорциональности между энергией магнитного поля и квадратом тока, то поэтому в конечное соотношение для индуктивности входит квадрат частоты в знаменателе. Когда квадрат частоты идёт в нуль, то потери на нагрев в системе становятся малыми, диамагнетизм становится малым, а энергия магнитного поля, закачиваемого в систему, остаётся постоянной величиной, совпадающей с энергией магнитного поля индуктивности. Из-за этого стремление тока к нулю даёт нефизическое увеличение индуктивности, которое описывается особенностью, обратно пропорциональной квадрату частоты.
- Существование особенности индуктивности не позволяет переходить динамической индуктивности в статическую индуктивность на сверхнизких частотах.
- Может показаться, что особенность позволит получать большие, по сравнению с масштабом, индуктивности на сверхнизких частотах. При выполнении оценочных расчётов рекомендуется ограничиваться десятью двадцатью масштабами, как в положительной низкочастотной области, так и в среднечастотной отрицательной области.
- Наличие особенности индуктивности на сверхнизких частотах указывает на достоинство предлагаемого метода. Он может быть применён для расчёта микроскопических индуктивностей в интервале высоких, сверхвысоких и крайне высоких частот, который начинается с частоты порядка 100 МГц.
- Экспериментальные исследования поведения модели на сверхнизких частотах реальных вносимых индуктивностей цилиндрической пленки позволит ввести ограничения на значения нижней частоты среза, существующей в модели, ниже которой теория будет сильно расходиться с экспериментом.

## ГЛАВА 5

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИНДУКТИВНОСТИ ЛЕНТОЧНЫХ МИКРО-СОЛЕНОИДОВ И СПОСОБА УВЕЛИЧЕНИЯ ИХ ГРАНИЧНОЙ ЧАСТОТЫ

Уменьшение размеров элементов интегральных микросхем породило проблему создания на плате высокочастотной интегральной индуктивности приемлемых значений. Применение технологии создания мощных ленточных соленоидов микронных размеров в выходных каскадах, предложенное фирмой PARC, (Palo Alto Research Centre, Калифорния), позволило получать работоспособные индуктивности с высокой добротностью до частот 8 ГГц [5]. Соленоиды имеют малое число витков (от 3-6), выполнены из сплава *Mo-Cr*, покрытого внутри золотой плёнкой.

#### 5.1 Индуктивные свойства ленточных микро-соленоидов

Для таких индуктивностей существует метод расчёта, ставший классическим. Он излагается на протяжении 70 лет в различных учебниках по физике и радиотехнике. Из метода следует два физических результата: 1) индуктивность соленоида при постоянном числе витков на единицу длины можно увеличить только за счёт роста объёма соленоида; 2) индуктивность соленоида увеличивается квадратично с увеличением количества витков.

Приведём этот вывод, и исследуем неожиданные физические следствия, которые были не замечены уже неизвестными авторами классического метода расчёта. В его основу положены следующие соображения. На цилиндрическую катушку радиусом  $R$  наматывается в один слой плотно друг к другу  $N$  витков провода кругового сечения диаметром  $d$ . На рис. 5.1 приводится схема намотки и геометрические размеры соленоида. При протекании тока внутри соленоида формируется среднее значение магнитной индукции, которое вычисляется из соотношения

$$B = \mu_0 Ni / l = \mu_0 i / d = \mu_0 j_l, \quad (5.1)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная,  $i$  – ток в соленоиде,  $l$  – его длина.

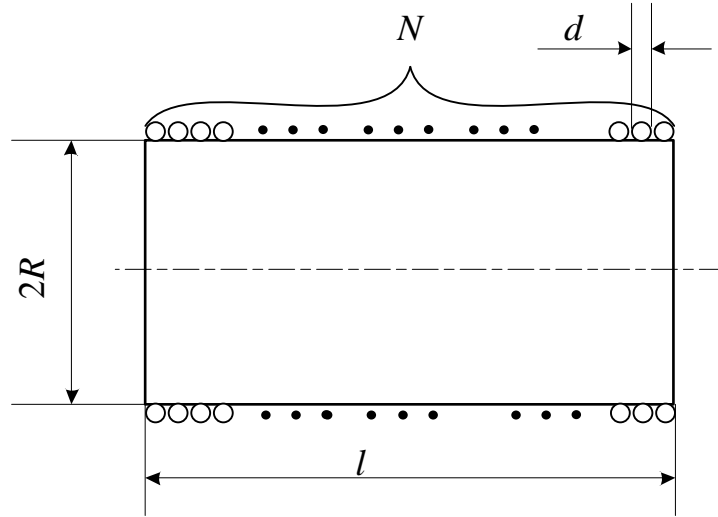


Рис. 5.1. Схема намотки и геометрические размеры соленооида

В случае ленточного соленооида  $d$  – аксиальная ширина ленты. Заметим, что значение индукции  $B$  в (5.1) определяется только линейной плотностью тока соленооида  $j_l$ . Записывая формулу для потокосцепления

$$\Psi = N\Phi = NBS = \mu_0 NSj_l, \quad (5.2)$$

получаем индуктивность соленооида  $L$  в виде

$$L = \mu_0 V / d^2 = \mu_0 n^2 V. \quad (5.3)$$

В (5.3) введены обозначения  $V = Sl$  – объём соленооида,  $n = N/l$  – число витков на единицу длины соленооида. Из (5.3) следует отмеченный ранее физический результат. Формулу (5.3) можно представить и в другом виде

$$L = \mu_0 N^2 S^2 / V, \quad (5.4)$$

из которой следует, что при постоянных  $N$  и  $S$  индуктивность можно увеличить только за счёт уменьшения объёма соленооида. Этот, на первый взгляд, парадокс обескураживает исследователя индуктивности.

Почему соотношения (5.3) и (5.4) противоречат друг другу? Причина этого в том, что при решении поставленной задачи не был выделен масштаб индуктивности  $L_*$ . Он и снимает обнаруженное противоречие. Выделим его в соотношении (5.3)

$$L_* = \mu_0 \pi R, \quad (5.5)$$

где  $R$  – радиус соленооида. Из (5.5) видно, что масштаб индуктивности соленоидальной катушки линейная функция его радиуса. Тогда (5.3) и (5.4) могут быть сведены к одному и тому же каноническому виду

$$\frac{L}{L_*} = N \frac{R}{d}. \quad (5.6)$$

В рассматриваемом случае индуктивность определена соотношением

$$\Psi = Li. \quad (5.7)$$

Подставляя (5.6) в (5.7), получим ещё одно каноническое соотношение для приведённого потока



$$\frac{\Psi}{\Psi_*} = N \frac{R}{d}, \quad (5.8)$$

где  $\Psi_* = L_* i$  – масштаб потокоцепления.

## 5.2. Эталонная индуктивность и индуктивности с малым и большим потокоцеплением

Из канонических соотношений следуют выводы:

- 1) приведённая индуктивность  $L/L_*$  – линейная, а не квадратичная функция от числа витков  $N$ ;
- 2) тангенс угла наклона прямой  $R/d$  – определяет своеобразную скорость набора индуктивности и приведённого потока с ростом числа витков  $N$ ;
- 3) эталонная индуктивность  $L_e$  реализуется при единичном тангенсе  $R=d$  и изменяется с ростом  $N$  по закону

$$L_e = L_* N. \quad (5.9)$$

Любопытно, но в [5] исследован именно этот класс ленточных соленоидов. Причина этого заключается в том, что технологам требовалось увеличить жёсткость микроскопической интегральной индуктивности при её расположении на плате.

- 4) для эталонной индуктивности поток (5.8) изменяется по похожему соотношению.
- 5) из (5.6) и (5.8) видно, что существуют два класса индуктивностей: класс индуктивностей с малым потокоцеплением (МП – индуктивность), у которых  $R < d$  (тангенс угла наклона меньше 1) и класс индуктивностей с большим потокоцеплением (БП – индуктивность), у которых  $R > d$  (тангенс угла наклона больше 1);
- 6) для одного и того же числа витков  $N$  можно получить либо большую индуктивность, либо меньшую индуктивность, по сравнению с эталонной.

Чем же отличаются по физическим свойствам эти два класса индуктивностей? МП – индуктивности имеют аксиальную ширину ленты  $d$  больше радиуса соленоида  $R$ . Но, чем шире лента, тем меньше значение линейной плотности тока  $j_l$  в (5.1), а стало быть, меньше значение индукции  $B$  и потокоцепления  $\Psi$ , по сравнению с эталонной, при том же токе  $i$ . Тогда уменьшение  $\Psi$  при том же токе приводит к уменьшению  $L$ .

БП индуктивности имеют аксиальную ширину ленты  $d$  меньше радиуса соленоида  $R$ . При том же токе, это обеспечивает увеличение индукции  $B$  в соленоиде (потокоцепления), по сравнению с эталонной, за счёт увеличения линейной плотности тока  $j_l$ . Обычно наматываемые катушки индуктивности всегда удовлетворяют этому соотношению и являются индуктивностями с большими потоками.

Что происходит при этом с геометрическими характеристиками соленоида? Зафиксируем число витков  $N$  и площадь поперечного сечения соленоида  $S$ . Для МП – соленоида длина, объём и индуктивность соленоида

$$l_1 = d_1 N, \quad V_1 = S N d_1, \quad L_1 = \mu_0 S l_1 / d_1^2. \quad (5.10)$$

То же самое для БП – соленоида

$$l_2 = d_2 N, \quad V_2 = S N d_2, \quad L_2 = \mu_0 S l_2 / d_2^2. \quad (5.11)$$

Отношение их индуктивностей

$$L_2 / L_1 = d_1 / d_2. \quad (5.12)$$

А отношение объёмов

$$V_2 / V_1 = d_2 / d_1 = L_1 / L_2. \quad (5.13)$$

БП – индуктивности могут иметь на порядок большие значения индуктивности, по сравнению с МП – индуктивностью, если уменьшить на порядок аксиальную толщину ленты (диаметр провода)  $d_2 = d_1 / 10$ , что обеспечивает уменьшение их объёма на порядок при том же числе витков и площади поперечного сечения соленоида. При этом не следует забывать, что уменьшение диаметра провода (ширины ленты) будет приводить к тому, что у такого соленоида будет увеличиваться обычная плотность тока. А он не может быть больше значений, ограниченных скоростью теплопередачи.

Таким же образом можно получать индуктивность в 10 раз больше, чем эталонная. Сделаем оценку для эталонной индуктивности ленточного соленоида с  $N=6$  витков, радиусом  $R=0,4$  мм; с аксиальной шириной  $d=R$ . Имеем масштаб  $L_* = \mu_0 \pi R = 1,58$  нГн, а индуктивность  $L=9,48$  нГн. Полученное значение с хорошей точностью согласуется с экспериментом для микрокатушки на кремниевой подложке с удельным сопротивлением  $10 \dots 20$  Ом·см [5]. Измерения, сделанные для 4-6 витков, указывают на правильность предложенной физической трактовки полученных в разделе результатов.

Следует отметить, что все полученные теоретически соотношения были сделаны в приближении однородного магнитного поля бесконечного соленоида. Но тем, не менее, вычисление физических параметров индуктивности и для конечных соленоидов, имеющих от 4-6 витков, дают результаты, не сильно расходящиеся с измерениями.

### 5.3 Добротность и плотности индуктивности соленоида в микро- и нано-размерах

Вычислим добротность микросоленоида. Для этого необходимо рассчитать его омическое сопротивление. На рис. 5.2 представлена развертка одного витка катушки. Считаем, что один виток имеет периметр  $2\pi R$  и смещен по оси катушки на диаметр провода  $d$ . Такое предположение

дает возможность рассчитать омическое сопротивление соленоида только при выполнении предположения, что соленоид имеет БП-индуктивность, т.е.  $d \ll R$ .

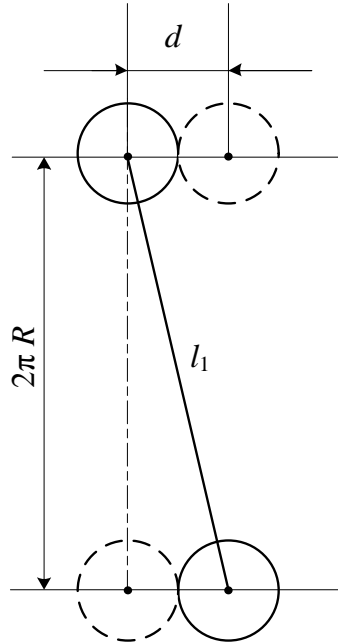


Рис. 5.2. Развертка одного витка микросоленоида

Тогда длина одиночного витка провода

$$\ell_1 = \sqrt{(2\pi R)^2 + d^2}, \quad (5.14)$$

а длина  $N$  витков катушки

$$\ell_N = N \cdot \ell_1 = N \sqrt{(2\pi R)^2 + d^2}. \quad (5.15)$$

Омическое сопротивление  $N$  витков соленоида имеет вид

$$R_N = \frac{4\rho\ell_N}{\pi d^2} = \frac{4\rho N}{\pi d^2} \sqrt{(2\pi R)^2 + d^2}, \quad (5.16)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление провода катушки.

Подставляя (5.16) в формулу добротности по определению, и учитывая (5.6), получим

$$Q = \frac{\omega L}{R_N} = \frac{\omega}{\Omega_*}. \quad (5.17)$$

В соотношении (5.17)

$$\Omega_* = \frac{4\rho}{\mu_0 \pi R^2} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R}{d}\right)^2} \quad (5.18)$$

– характеристическая частота системы, которая не зависит от числа витков соленоида  $N$ .

В рассматриваемом предположении  $d \ll R$  и (5.18) можно упростить

$$\Omega_* = \frac{4\rho}{\mu_0 d R}. \quad (5.19)$$

Характеристическая частота  $\Omega_*$  определяет верхнее значение частоты  $\omega$ , выше которой добротность соленоида  $Q$  будет больше 1. Из (5.19) видно, что при фиксированных  $\rho$  и  $R$  уменьшение диаметра провода будет приводить к повышению характеристической частоты и добиться больших значений добротности можно будет только на достаточно высоких частотах.

Поскольку при выводе (5.17) использовалось предположение постоянного тока, то соотношение (5.17) следует применять только для оценок добротности различных микросолоноидов на низких частотах.

Рассчитаем плотности индуктивности микросолоноида. Объемная плотность индуктивности

$$\rho_L = \frac{L}{V} = \frac{\mu_0}{d^2} \quad (5.20)$$

зависит только от квадрата толщины применяемого провода  $d$ . Из (5.20) видно, что переход от микроразмеров к наноразмерам увеличивает рассчитываемое значение в огромное количество раз.

Поверхностная плотность индуктивности получается нормированием индуктивности на площадь  $S = 2RNd$

$$\sigma_L = \frac{L}{S} = \rho_L \frac{\pi R}{2}. \quad (5.21)$$

Она оказывается связанной с объемной плотностью индуктивности.

Линейную плотность индуктивности можно ввести для длинных соленоидов. Она получается нормированием индуктивности на длину соленоида  $\ell = N \cdot d$

$$\tau_L = \frac{L}{\ell} = \rho_L \pi R^2. \quad (5.22)$$

Параметры (5.20), (5.21) и (5.22) являются важнейшими сравнительными технологическими параметрами микросолоноида. В табл. 5.1 размещены все основные параметры микросолоноида, который имел  $N=10$  витков,  $R=10d$  и был намотан медным проводом диаметром  $d$ . Табл. 5.1 рассчитана в микрометровом диапазоне размеров.

Из табл. 5.1 видно, что в микрометровом диапазоне размеров при изменении диаметра медного провода от 10 до 400 мкм объемная плотность индуктивности микрокатушки уменьшается от  $1,26 \cdot 10^4$  до  $7,85$  Гн/м<sup>3</sup>, поверхностная плотность уменьшается от 2,0 до 0,05 Гн/м<sup>2</sup>, а линейная плотность индуктивности остается постоянной 0,395 мГн/м. Это связано с тем, что было принято  $R=10d$ . Уменьшение диаметра провода приводит к росту характеристической частоты  $\Omega_*$  от  $6,4 \cdot 10^4$  до  $1,0 \cdot 10^8$  1/с и уменьшению индуктивности соленоида с 1,58 до 0,04 мкГн.

Таблица 5.1

Параметры микросолоноида в микрометровом диапазоне

$d$ (мкм)	$\rho_L$ (Гн/м <sup>3</sup> )	$\sigma_L$ (Гн/м <sup>2</sup> )	$\tau_L$ (мГн/м)	$\Omega_*$ (1/с)	$L$ (мкГн)
400	7,85	0,05	0,395	$6,4 \cdot 10^4$	1,58
200	31,4	0,1	0,395	$2,6 \cdot 10^5$	0,79
100	126	0,2	0,395	$1,0 \cdot 10^6$	0,39
50	503	0,4	0,395	$4,0 \cdot 10^6$	0,19
20	$3,14 \cdot 10^3$	1,0	0,395	$2,6 \cdot 10^7$	0,08
10	$1,26 \cdot 10^4$	2,0	0,395	$1,0 \cdot 10^8$	0,04

Рассчитанные параметры позволяют выбрать оптимальные значения геометрических размеров катушки и ее индуктивности. Следует отметить, что выбор микрометрового диапазона ставит перед технологами задачу о получении катушек, у которых расстояние между витками было бы жестко фиксированным.

В таблице 5.2 приведены параметры наносолоноида, который имел  $N=10$  витков,  $R=10d$  и был намотан медным проводом диаметром  $d$ . Диаметр провода изменялся в нанометрах.

Таблица 5.2

Параметры микросолоноида в нанометровом диапазоне

$d$ (нм)	$\rho_L$ (МГн/м <sup>3</sup> )	$\sigma_L$ (Гн/м <sup>2</sup> )	$\tau_L$ (мГн/м)	$\Omega_*$ (1/с)	$L$ (нГн)
400	7,85	49,3	0,395	$6,4 \cdot 10^{10}$	1,6
200	31,4	98,7	0,395	$2,6 \cdot 10^{11}$	0,79
100	126	197	0,395	$1,0 \cdot 10^{12}$	0,39
50	503	395	0,395	$4,0 \cdot 10^{12}$	0,19
20	$3,14 \cdot 10^3$	987	0,395	$2,5 \cdot 10^{13}$	0,08
10	$12,6 \cdot 10^3$	$1,97 \cdot 10^3$	0,395	$1,0 \cdot 10^{14}$	0,04

Из табл. 5.2 видно, что для наноразмерного соленоида достигается огромная объемная плотность индуктивности. Она может принимать значения от  $12,6 \cdot 10^9$  Гн/м<sup>5</sup>. Причина этого резкое уменьшение объема наносолоноида. Это также уменьшает достижимое значение индуктивности. В рассчитанном диапазоне она изменяется от 0,04 до 1,6 нГн. Большим препятствием для создания таких катушек будут слишком высокие характеристические частоты, которые даже для размера  $d=400$  нм уходят в область до 70 ГГц.

В настоящее время нанотехнологи уже освоили производство нанотрубок. Они обычно получаются в виде спиралей с нанодиаметром и нанощагом спирали. Такие нанотрубки, по-видимому, будут играть роль индуктивных элементов только тогда, когда человечеству удастся освоить терагерцовый диапазон частот. При их производстве стоит исключительно

сложная проблема подведения в них тока наноамперных масштабов и создание специфических условий для увеличения механической жесткости применяемых спиралей.

#### 5.4 О способе увеличения граничной частоты ленточного микросоленоида

Эксперименты, проведенные с ленточными соленоидами (микрокатушками) в [5] показывают, что измеряемая величина индуктивности не зависит от частоты практически до частоты отсечки (частоты среза, критической частоты). Это указывает на то, что вплоть до таких высоких частот на таких малых геометрических размерах фазовый сдвиг между током и потоком остается нулевым.

На рис. 5.3 приведены типичные экспериментальные частотные характеристики индуктивности микро-соленоидов фирмы PARC, расположенных на подложке из высокоомного кремния для различного числа витков.

Из рис. 5.3 видно, что частота среза  $f_0$  с уменьшением числа витков увеличивается: катушка с числом витков  $N=6$  имеет частоту среза 2,1 ГГц, катушка с числом витков  $N=5$  имеет частоту среза 2,5 ГГц, а катушка с  $N=4$  имеет частоту среза 3 ГГц.

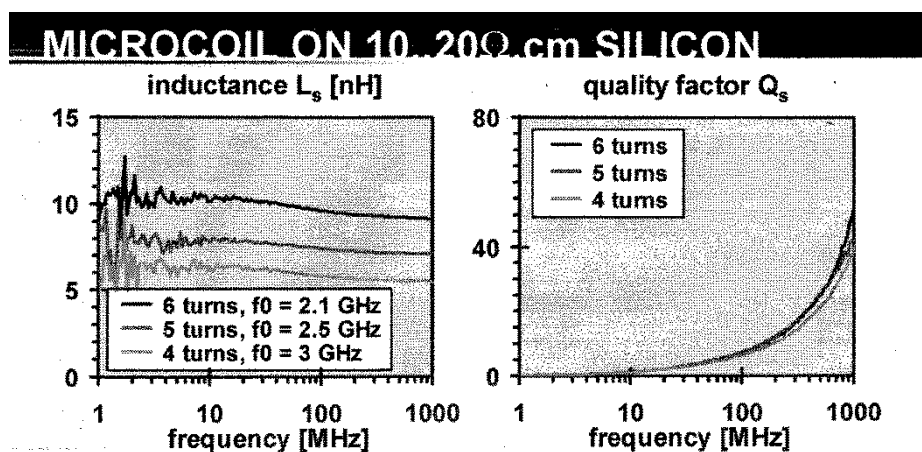


Рис. 5.3. Частотные характеристики индуктивности и добротности микро-соленоидов фирмы PARC [5]

Отметим достаточно большую добротность исследуемых микросоленоидов и её нелинейную зависимость от частоты. Существенное отличие частотной зависимости добротности от теоретической линейной (5.17) можно объяснить тем, что все соотношения раздела 5 получены в предположении однородности распределения плотности тока по поперечному сечению проводника. А как теперь становится ясным, что в цилиндрических проводниках она

радиально неоднородна, то рассмотренная модель требует своего дальнейшего уточнения.

Экспериментаторы отмечают изменение на 25% как значения индуктивности и добротности катушек, которые размещаются на кремнии, либо на стекле, так и частоты среза. Это можно объяснить тем, что размещённые на разных проводящих и полупроводящих подложках катушки нагружают часть своих внешних силовых линий магнитного поля на проводящее и полупроводящее вещество. Это взаимодействие силовых линий с веществом и изменяет как значение индуктивности, так и частоту среза, повышая её.

Частотные зависимости на рис. 5.3 приведены для ленточных классических микро-соленоидов диаметром 800 мкм длиной от 1,6 до 2,4 мм с количеством витков от 4-х до 6-и, используемых в мощных выходных каскадах. Как видно из рис. 5.3, в них всегда наблюдают одно и то же явление. На малых частотах индуктивность совпадает со своим статическим значением, оставаясь постоянной. Потом на низких частотах возникает дребезг индуктивности, который связан с механическим резонансом, возникающим на продольных механических колебаниях упругих витков катушки. Сами механические колебания обусловлены притяжением витков друг к другу из-за действия сонаправленных токов Ампера. Такое притяжение возникает на каждом полупериоде переменного тока. При дальнейшем увеличении частоты при приближении к частоте среза индуктивность увеличивается на порядок, а затем скачком теряет свои физические свойства.

Увеличение индуктивности свёрнутой ленты микро-соленоида с ростом частоты можно объяснить только увеличением линейной плотности тока, протекающего в ленте. Это возможно только в том случае, если переменный ток в ленте образует тонкий шнур, диаметр которого становится меньше, чем продольная ширина ленты, свитой в соленоид. С приближением частоты тока к частоте среза токовый шнур «исчезает» и соленоид теряет свои индуктивные свойства.

Объяснить уменьшение диаметра токового шнура на СВЧ можно только на языке сил, удерживающих цилиндрический шнур. С ростом частоты внешний источник вбрасывает в проводник всё меньше и меньше одноимённых зарядов, образующих ток, за полупериод изменения последнего. Это снижает объёмную плотность кулоновских сил расталкивания, действующих между движущимися в одном направлении зарядами. В то же время объёмная плотность стягивающих (амперовских) сил либо не изменяется, либо уменьшается с частотой медленнее, чем силы кулоновского взаимодействия. Частота среза приходится на тот момент, когда шнур начинает катастрофически сжиматься в пинч. В этот момент зарегистрировано, что индуктивность одиночного индуктора резко возрастает, а затем проводник теряет свои индуктивные свойства.

Метод вносимой индуктивности, развитый в разделе 4, является универсальным и сможет помочь ликвидировать в ленточных соленоидах «проблему частоты среза» [5]. Частотные зависимости индуктивности ленточной микрокатушки фирмы PARC всегда имеют частоту, выше которой она теряет свои индуктивные свойства. Её называют частотой среза или граничной частотой.

На рис. 5.4. представлены теоретические частотные зависимости микрокатушки. Частота среза на рис. 5.4. изменяется от 0,75 ГГц до 2,2 ГГц.

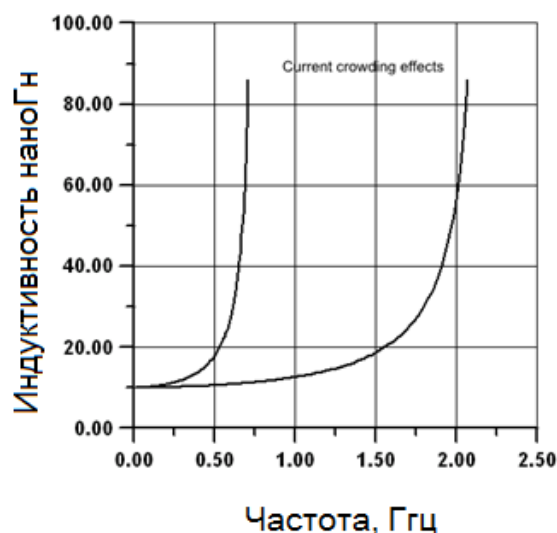


Рис. 5.4. Частоты среза 0,75 ГГц и 2,2 ГГц из-за Current Crowding Effects

Как теперь становится ясным, частота среза возникает из-за шнурования тока в Current Crowding Effects (эффекты уплотнения тока в цилиндрическом токовом шнуре). Расположение микрокатушки на кремниевой подложке (см. рис. 5.5), которая замыкает на себя часть внешних силовых линий магнитного поля, позволяет увеличить частоту среза с 0,75 до 2,2 ГГц, но не позволяет совсем избавиться от неё.

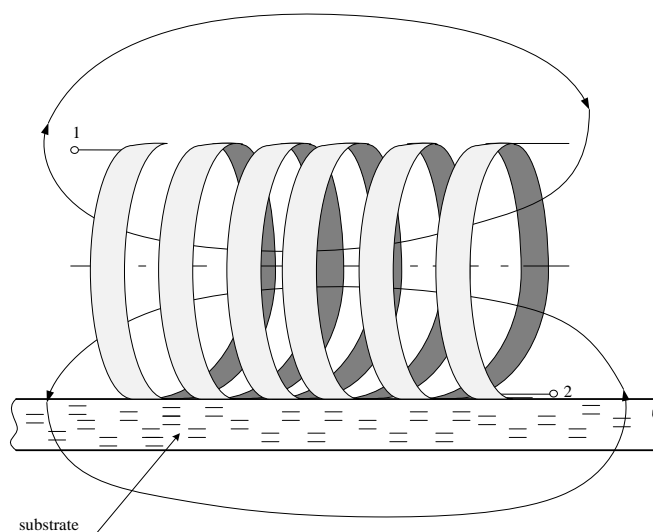


Рис. 5.5. Расположение микрокатушки на кремниевой подложке



Для того, чтобы увеличить рабочий диапазон микрокатушки необходимо вводить в соленоид перпендикулярно оси системы аксиально-тонкие плёнки различных проводников или полупроводников так, как это указано на рис. 5.6.

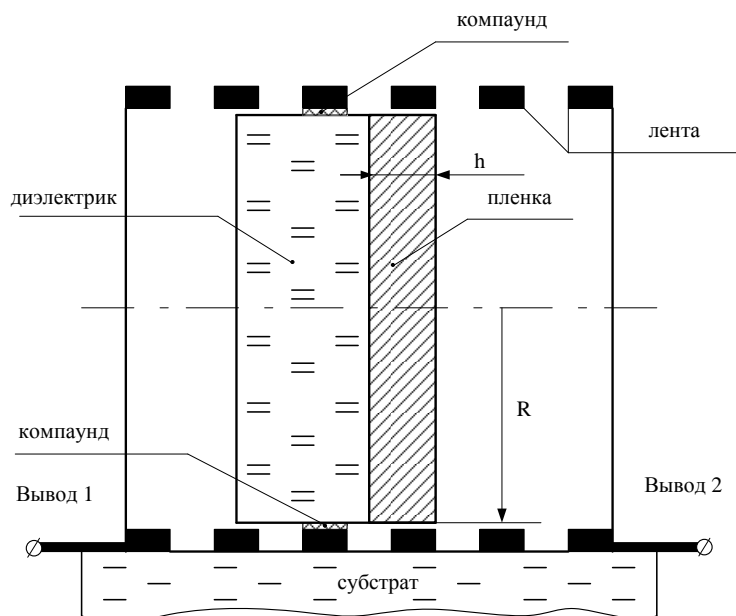


Рис.5.6. Один из способов введения полупроводящей плёнки

Пленку нужно напылить на торец цилиндрического диэлектрика. Его диаметр должен быть близок к диаметру соленоида. Введение проводящей плёнки изменит физический механизм формирования интегральной индуктивности ленточного соленоида, переводя его в класс вносимой индуктивности. Рассчитанные частотные характеристики индуктивности микросоленоида с плёнкой представлены на рис. 5.7.

Рассчитаем физические параметры цилиндрической плёнки из используемого фирмой PARC кремния (удельное сопротивление  $10,0 \text{ ом}\cdot\text{см}$ ), в предположении малости вклада радиальной компоненты. Пленку необходимо поместить в микрокатушку из 6-и витков с граничной частотой  $2,1 \text{ ГГц}$  (см. рис. 5.3), имеющую индуктивность  $10 \text{ нГн}$  [5]. После внесения плёнки будет реализован первый нуль индуктивности на частоте  $F_1=10^{10} \text{ Гц}$ . Вычисляя масштаб частоты  $f^*=F_1/0,1605=62,3 \text{ ГГц}$ , определим, что радиус плёнки равен  $900 \text{ мкм}$ . Это потребует увеличить в  $2,25$  раза радиус исходного соленоида. Для аксиальной толщины плёнки в  $2 \text{ мкм}$  мы получим масштаб индуктивности  $L^*=1,6 \text{ мГн}$ . На частоте  $f=F_1/2=5 \text{ ГГц}$  такая плёнка внесёт очень большую индуктивность  $L=77,3L^*=124 \text{ мГн}$ . Её рабочая частота будет выше частоты среза в  $2,3$  раза.

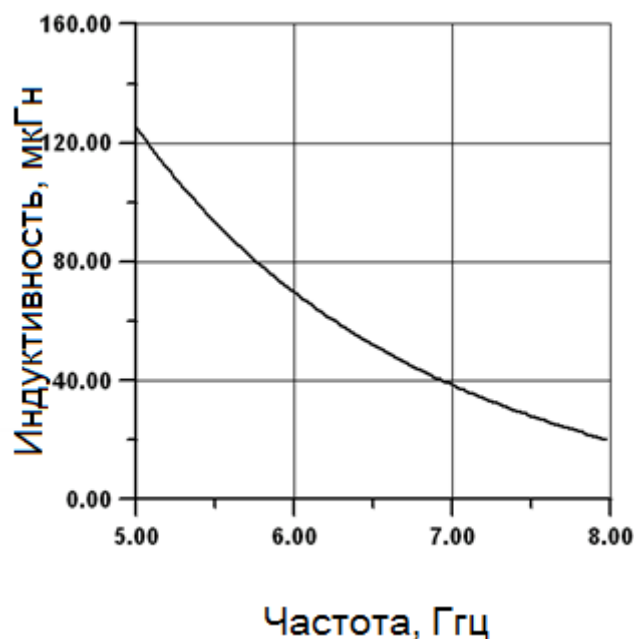


Рис. 5.7. Частотная зависимость кремниевой микроплёнки, вводимой в микросоленоид

Если рабочая частота будет совпадать с  $f_0=f^*/\pi=19,8$  ГГц, то индуктивность плёнки будет принимать отрицательное значение  $L=L_0=-15,3$  мкН. В этом случае она может применяться в качестве микроскопического компенсатора паразитной индуктивности последовательной цепи в интегральных микросхемах. Уменьшение её радиуса на порядок приведёт к уменьшению оценочных значений отрицательной индуктивности на два порядка. Эффект компенсации паразитной индуктивности в таких размерах может быть использован и в системах на кристалле.

На рабочей частоте  $f=12$  ТГц значение индуктивности будет снова положительным  $L_{\text{ЕНФ}}=L^*/3=533$  нГн. Из приводимых оценок следует, что для разных рабочих частот можно получать широкий спектр возможных значений индуктивности на одной микро-катушке для широкого класса СВЧ применений.

По разделу 5 опубликованы работы [55-57].

## 5.5 Выводы по главе 5

- Исследованы индуктивные свойства ленточных микросоленоидов. Получены канонические соотношения для приведённой индуктивности и приведённого потока.
- Из канонических соотношений следует, что приведённая индуктивность линейная, а не квадратичная, как считалось раньше, функция от числа витков.

- Отношение радиуса микросоленоида к диаметру провода (ширины ленты) определяет скорость набора индуктивности и приведённого потока с ростом его числа витков.
- Эталонная индуктивность реализуется при равенстве радиуса микросоленоида диаметру провода (ширине ленты). Такие микро-катушки производит фирма PARC.
- Существуют два класса индуктивностей: класс индуктивностей с малым потокосцеплением (МП-индуктивность), у которых радиус микросоленоида меньше диаметра провода; и класс индуктивностей с большим потокосцеплением (БП-индуктивность), у которых радиус микросоленоида больше диаметра провода (ширины ленты).
- Для одного и того же числа витков  $N$  можно получить либо большую индуктивность, либо малую, по сравнению с эталонной. Большая индуктивность будет иметь меньший объём чем малая индуктивность.
- БП-индуктивности всегда больше по значению, чем МП-индуктивности при одном и том же числе витков. Это происходит потому, что линейная плотность тока больше у БП-индуктивности.
- Такое свойство индуктивности позволяет увеличивать на порядок индуктивность ленточных микро-катушек фирмы PARC уменьшением на порядок ширины используемой ленты. Уменьшение на порядок ширины ленты уменьшит на порядок высоту микро-катушки. Возникающую проблему уменьшения механической жёсткости витков катушки можно решить, используя различные компаундные заливки.
- Получена оценочная формула для добротности микрокатушки. Из неё следует, что любая микрокатушка будет иметь добротность больше 1 при условии, что её рабочая частота будет больше характеристической, которая не зависит от числа витков соленоида.
- Приведены и рассчитаны важнейшие технологические параметры: объёмная, поверхностная и линейная плотности индуктивности микросоленоидов. В микрометровом диапазоне изменения диаметра медного провода от 10 до 400 мкм при условии  $R=10d$  перечисленные параметры изменяются в диапазонах: от  $1,26 \cdot 10^4$  до  $7,85$  Гн/м<sup>3</sup>; поверхностная плотность от 2,0 до 0,05 Гн/м<sup>2</sup>; линейная плотность индуктивности остаётся постоянной и равной 0,395 мГн/м. Уменьшение диаметра провода приводит к росту характеристической частоты от  $6,4 \cdot 10^4$  до  $1,0 \cdot 10^8$  1/с, но уменьшает индуктивность микросоленоида с 1,58 до 0,04 мкГн.
- Расчёты, приводимые для наноразмерных соленоидов, показывают, что объёмная плотность индуктивности может увеличиться до огромных значений  $12,6 \cdot 10^9$  Гн/м<sup>3</sup> при  $d=10$  нм. Большим препятствием для создания наноразмерных катушек индуктивности будут слишком высокие характеристические частоты, которые даже для диаметра  $d=400$

нм уходят в область до 70 ГГц и указывают на то, что при таких размерах индуктивности будет очень трудно получать высокие добротности. При их производстве может стать исключительно сложная проблема подведения к нанотрубке наноамперных токов и создания условий для обеспечения требуемой механической жесткости изделия.

- Предложен способ ликвидации в ленточных соленоидах фирмы PARC проблемы частоты среза. Для этого необходимо вводить по оси микросолоноида цилиндрические полупроводящие микроскопические плёнки так, чтобы оси соленоида и плёнки совпадали. Введение проводящей плёнки изменит физический механизм формирования интегральной индуктивности ленточного соленоида, переводя его в класс вносимой индуктивности, которая не имеет частоты среза. Приведены частотные характеристики вносимой индуктивности и сделаны оценки физических параметров таких плёнок для ленточного микросолоноида диаметром 800 мкм, имеющего исходную индуктивность около 10 нГн. Оценки показывают, что для аксиальной толщины кремниевой плёнки в 2 мкм мы получим масштаб индуктивности  $L^*=1,6 \mu\text{Гн}$ . На частоте  $f=5 \text{ ГГц}$  такая плёнка внесёт очень большую индуктивность  $L=77,3L^*=124 \mu\text{Гн}$  (что в 12400 раз больше исходной, а на КВЧ в 53,3 раза больше исходной без учёта индуктивности самого соленоида). Её рабочая частота в первом случае будет выше частоты среза в 2,3 раза.

## ГЛАВА 6

### ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛАНАРНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ ТИПА «ПРОВОДЯЩАЯ НАНОПЛЁНКА В ТОКОВОМ КОЛЬЦЕ»

Планарные индуктивности, которые (для повышения численных значений  $L$ ) реализуются на диэлектрической подложке в виде многovitковых круглых, спиральных, квадратных или более сложных геометрических форм, например, ортогональных спиралей широко используются в современных устройствах связи и телекоммуникаций в структуре «систем на кристалле» или «систем в корпусе». В ряде случаев интегральная индуктивность, предназначенная для СВЧ диапазона, выполняется в виде одного витка из напыляемой на подложку металлической пленки, образующей токовое кольцо. Однако такое конструктивно-технологическое решение уменьшает численное значение  $L$  до единиц наногенри (0,5-3,5 нГн для микронных геометрических размеров). Для получения в одном слое, например,  $L=2$  нГн требуется площадь 100 мкм на 100 мкм, что соответствует поверхностной плотности индуктивности 0,2 Гн/м<sup>2</sup> [10].

На рис. 6.1 представлен вид сверху типовой конструкции планарной индуктивности. Здесь, а также на рис. 6.2 ÷ рис. 6.5, приняты следующие обозначения:  $R$  – радиус дополнительной тонкой плёнки,  $h_2$  – ее толщина;  $R_1$  – внутренний радиус витка (токового кольца) из металлической пленки толщиной  $h_1$ ;  $R_2$  – внешний радиус витка (токового кольца) из металлической пленки толщиной  $h_1$ ; изолирующая подложка (например, из сапфира); 1 и 2 выводы интегральной индуктивности для ее включения в электронную схему.

Существенный недостаток интегральной индуктивности в виде одного витка рис. 1 состоит в том, что индуктивность ( $L$ ) данной конструкции в диапазоне геометрических размеров от 20 до 100 мкм имеет малые значения (0,5-3,5 нГн). Это ограничивает области ее практического использования в «системах на кристалле». Функциональные зависимости  $L$  такой конструкции, показывают, что  $L$  зависит от диаметра витка и его ширины, но при этом не может быть существенно увеличена за счет изменения её геометрических размеров в указанном диапазоне (20÷100 мкм).

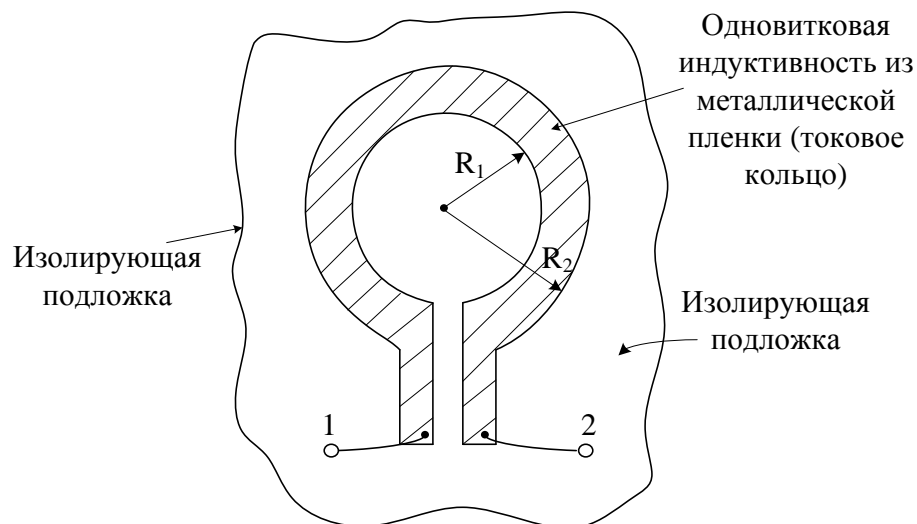


Рис. 6.1. Типовая конструкция планарной индуктивности

На рис. 6.2 приведен вид сверху конструкции предлагаемого устройства, которое использует известную топологию рис. 6.1 одновитковой индуктивности (одиночного токового кольца). Во внутреннюю область витка из металлической пленки толщиной  $h_1$  введена дополнительная тонкая пленка толщиной  $h_2 \ll h_1$  из материала, обладающего заданной электропроводностью и не имеющего электрического контакта с витком планарной индуктивности. При использовании такой индуктивности в мощных выходных каскадах величины  $R$ ,  $h_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  и  $h_1$  должны быть рассчитаны с учётом допустимого теплового энерговыделения.

Предлагается увеличить в 5-50 раз поверхностную плотность индуктивности путем расположения на той же площади кристалла дополнительной тонкой плёнки. Причем толщина  $h_2$  этой пленки должна находиться в диапазоне от десятков до сотен нанометров. При других значениях толщины  $h_2$  предлагаемый положительный результат не обеспечивается, т.к. он связан с наноразмерными эффектами.

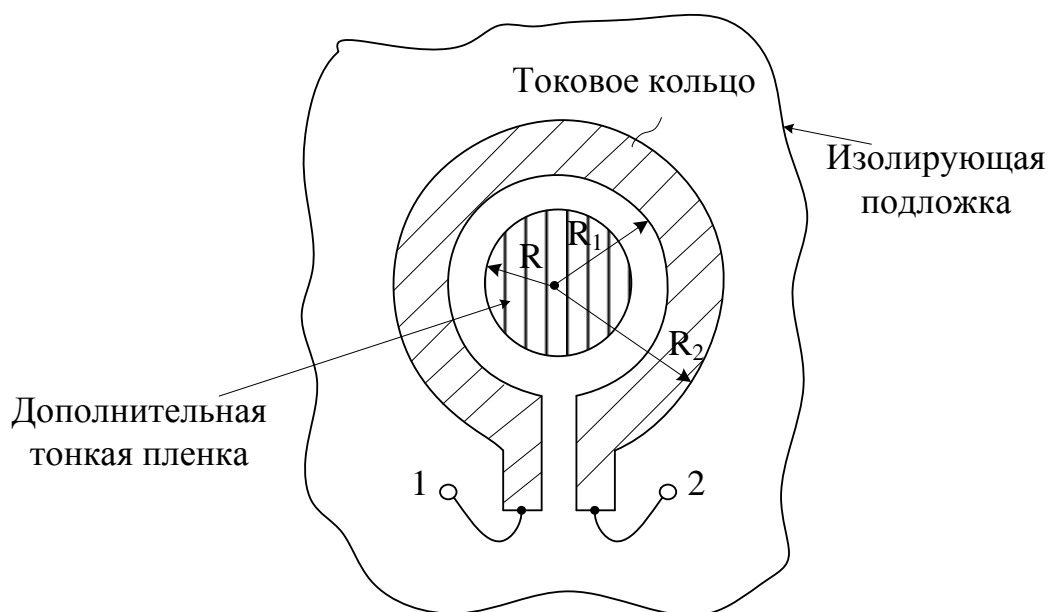


Рис. 6.2. Интегральная индуктивность в виде одного витка

На рис. 6.3 индуктивность рис. 6.2 представлена с объемным изображением изолирующей подложки.

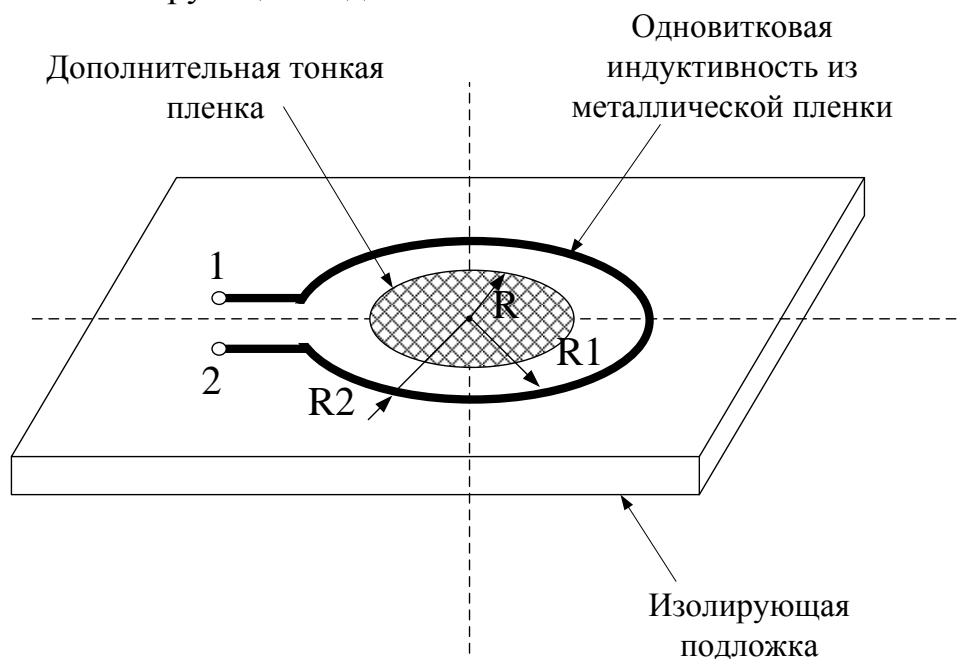


Рис.6.3. Интегральная индуктивность с объемным изображением изолирующей подложки

На рис. 6.4 показана предлагаемая конструкция (а), соответствующая рис. 6.2 и разрез по вертикальному сечению АВ (б). Замкнутыми кривыми со стрелками здесь схематически показаны силовые линии переменного магнитного поля для некоторого момента времени.

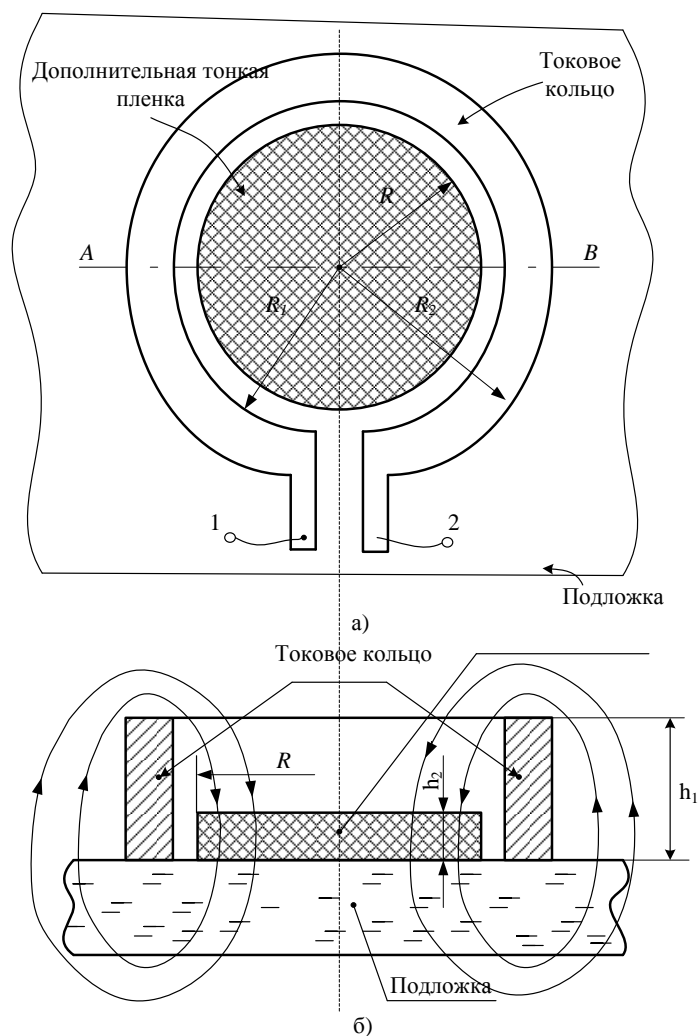


Рис. 6.4. Предлагаемая конструкция индуктивности (а) и ее разрез по вертикальному сечению АВ (б)

На рис. 6.5 представлен отдельный рисунок дополнительной тонкой пленки из рис. 6.4 б, который предназначен для аналитического расчета индуктивности  $L$  предлагаемого устройства.

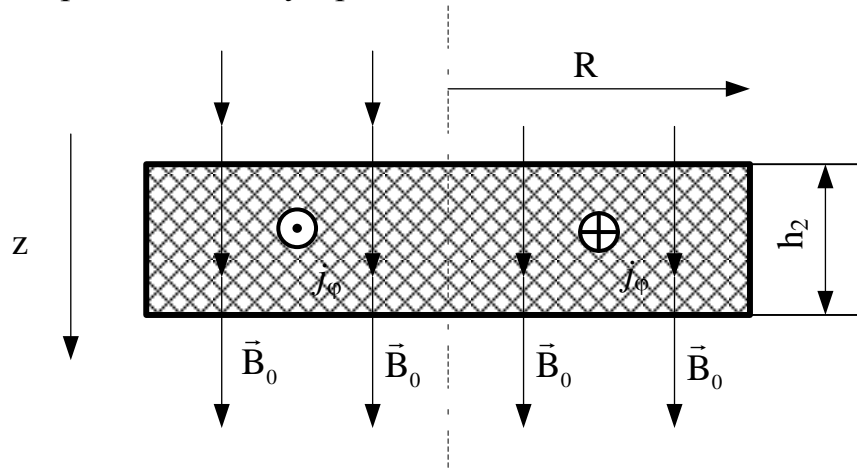


Рис. 6.5. Отдельный рисунок дополнительной тонкой пленки



Рассмотрим факторы, позволяющие получить более высокие значения  $L$  в предлагаемой планарной индуктивности (рис. 6.4, рис. 6.5).

Индуктивность конструкции  $L$  (рис. 6.4, рис. 6.5) относительно выводов 1 и 2 складывается из двух составляющих

$$L = L_{\kappa} + L_{\phi}, \quad (6.1)$$

где  $L_{\kappa}$  – индуктивность витка (токового кольца), расчет которой можно выполнить на основе графиков, представленных в разделе 2 (или см. [45]);

$L_{\phi}$  – потоковая индуктивность дополнительной тонкой пленки 5, расчет которой представлен ниже.

Предположим, что дополнительная тонкая плёнка (сплошная, проводящая, немагнитная) находится во внешнем однородном переменном магнитном поле, направленном по оси  $z$ , которое имеет только одну компоненту  $\vec{B} = (0, 0, B_z)$  (рис. 6.5). Это внешнее для дополнительной тонкой плёнки магнитное поле создаётся витком (токовым кольцом), а его зависимость от времени имеет вид

$$B_z = B_0 \cos \omega t. \quad (6.2)$$

Для простоты предполагаем, что однородное в пространстве магнитное поле  $B_0 = \text{const}$  не зависит от цилиндрических координат системы  $(r, \varphi, z)$  и ограничено в радиальном направлении внешним радиусом цилиндра  $R$  дополнительной тонкой плёнки, а в аксиальном направлении – толщиной дополнительной тонкой пленки, обозначенной через  $h_2$ .

На рис. 6.5 показаны направления векторов и силовых линий внешнего переменного магнитного поля относительно оси дополнительной тонкой плёнки, а также направления азимутальной компоненты вектора плотности тока Фуко, имеющей единственную компоненту  $j_{\phi}$ , для некоторого момента времени.

При такой ориентации переменное магнитное поле будет порождать в дополнительной тонкой плёнке вихревое электрическое поле, напряженность которого  $\vec{E} = (0, E_{\varphi}, 0)$  имеет только одну компоненту. Впервые экспериментальное доказательство существования такой возможной ориентации вихревого электрического поля было обнаружено при создании бетатронов – индукционных ускорителей электронов. В них ускорение электронов осуществляется вихревым электрическим полем, силовые линии которого представляют собой концентрические окружности. В ускорителе они формируются электромагнитом специальной формы, а в предлагаемом устройстве – дополнительной тонкой плёнкой строго определенной толщины  $h_2 \ll h_1$ .

Компоненты полей в системе связаны между собой первым уравнением Максвелла, записанным в проекциях цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$

$$\sigma(\text{rot} \vec{E})_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (6.3)$$

где  $\sigma = \pm 1$  – уточняющий знаковый множитель. Он включает в себя две возможные ориентации ротора вихревого электрического поля по отношению к исходному направлению вектора  $B_0$ . Как показывают эксперименты, проведенные американскими технологами, значение  $\sigma = -1$  возникает в цилиндрических плёнках с толщиной десятки и сотни нанометров. В таких сверхтонких плёнках токи Фуко формируют частотно-независимую положительную индуктивность  $L_\phi$ , которая приводится к выводам 1 и 2 интегральной индуктивности, проявляя свои неожиданные парамагнитные свойства.

Значение  $\sigma = +1$  реализуется при протекании токов Фуко в проводящих цилиндрах в макроскопических масштабах, которые проявляют свои естественные диамагнитные свойства. Высота проводящего цилиндра  $h_2$  дополнительной тонкой пленки при этом должна быть больше его радиуса  $R$  и значительно превышать 1 мкм.

Полагая в (6.3), что

$$\sigma E_\phi = E_0(r) \sin \omega t, \quad (6.4)$$

из уравнения (6.4) получим уравнение, связывающее  $E_0(r)$  и  $B_0$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma E_0) = \omega B_0, \quad (6.5)$$

где  $r$  – радиус текущей точки наблюдения в цилиндрической системе координат, который может изменяться в диапазоне  $0 \div R$ .

Решение уравнения (6.5) для  $E_0(r)$  имеет вид

$$\sigma E_0(r) = \omega B_0 r / 2 + C_1 / r, \quad (6.6)$$

где  $C_1$  – постоянная величина.

В решении (6.6) избавимся от особенности при  $r \rightarrow 0$ , полагая  $C_1 = 0$ . Это условие приводит к тому, что при  $B_0 = 0$  величина  $E_0 = 0$ . Из (6.6) видно, что азимутальная компонента вектора напряженности вихревого электрического поля – линейная функция радиуса  $r$  с масштабом

$$E_* = \omega B_0 R / 2 = \pi f B_0 R. \quad (6.7)$$

В масштабе напряжённости учтено соотношение  $\omega = 2\pi f$ . Тогда (6.6) с учётом (6.7) при  $0 \leq r \leq R$  имеет вид

$$E_0(r) = \sigma E_* r / R. \quad (6.8)$$

Электрическое поле в проводящем цилиндре из дополнительной тонкой плёнки создает вихревые токи Фуко, плотность тока которых имеет такое же направление в пространстве  $\vec{j} = (0, j_\phi, 0)$ . Плотность токов Фуко рассчитывается из дифференциального закона Ома

$$j_\phi = E_\phi / \rho, \quad (6.9)$$

где  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление дополнительной тонкой плёнки 5.

Из (6.9) видно, что плотность тока Фуко в однородной проводящей среде  $\rho = \text{const}$  также является линейной функцией радиуса  $r$  и также зависит от времени, как и  $E_\varphi$

$$j_\varphi = \sigma j_0(r) \sin \omega t, \quad (6.10)$$

где  $j_0(r)$  связано с масштабом плотности тока

$$j_* = \pi f B_0 R / \rho \quad (6.11)$$

соотношением

$$j_0(r) = j_* r / R. \quad (6.12)$$

Из соотношения (6.11) видно, что при прочих равных условиях масштаб плотности тока может достигать больших значений на высоких частотах для проводящей среды с малым значением удельного сопротивления  $\rho$ . Это будет приводить к нагреву проводящей плёнки на высокой частоте.

Вихревой ток, индуцированный во всей дополнительной тонкой плёнке, может быть получен из интегрирования плотности тока в цилиндрических координатах

$$i = \int_S \vec{j} d\vec{s} = \int_0^{h_2} \int_0^R j_\varphi dr dz = i_* \sin \omega t, \quad (6.13)$$

$$\text{где} \quad i_* = j_* h_2 R / 2 = \pi f B_0 h_2 R^2 / (2\rho) \quad (6.14)$$

– масштаб индукционного тока.

Плотность вихревых токов Фуко (6.10) создаёт в пространстве цилиндра дополнительной тонкой плёнки собственное магнитное поле  $\vec{B}_1$ . Это магнитное поле отклика вещества на внешнее воздействие для исходной ориентации вихревых токов в цилиндрической системе координат имеет одну проекцию  $B_{1z}$ . Направление проекции  $B_{1z}$  во всех точках цилиндра противоположно внешнему магнитному полю  $B_0$ . В этом и заключается основная причина диамагнетизма, проявляемого токами Фуко.

Распределение магнитного поля отклика вещества можно рассчитать из второго уравнения Максвелла, записанного в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ :

$$(\text{rot } \vec{B}_1)_\varphi = -\frac{\partial B_{1z}}{\partial r} = \mu_0 j_\varphi. \quad (6.15)$$

Интегрируя (6.15) для начального условия  $B_{1z}(0)$  с учётом (6.10), получим

$$B_{1z} = -\sigma B_{1*} (r/R)^2 \sin \omega t, \quad (6.16)$$

где

$$B_{1*} = \mu_0 j_* R / 2 \quad (6.17)$$

масштаб индукции магнитного поля отклика вещества. Его можно связать с индукцией внешнего магнитного поля безразмерным параметром  $\beta$

$$B_{1*} = \beta B_0, \quad (6.18)$$

который указывает на влияние магнетизма токов Фуко:

$$\beta = \frac{\mu_0 \pi R^2 f}{2\rho} = \frac{f}{f_*}, \quad (6.19)$$

где

$$f_* = 2\rho / (\mu_0 \pi R^2) \quad (6.19)$$

– масштаб частоты системы рис. 6.4. Из (6.18) видно, что магнетизм токов Фуко слабо проявляет себя при  $\beta \rightarrow 0$  и его влияние велико на высоких частотах, когда  $\beta \gg 1$ . При значении  $\beta = 1$  масштабы индукций магнитных полей одинаковы. Как видно из (6.20), масштаб частоты системы рис. 6.4 не зависит от толщины дополнительной тонкой плёнки.

Исследуем индуктивные свойства дополнительной тонкой плёнки. Найдём её потоковую индуктивность из соотношения

$$\langle \Phi \rangle = L_\Phi \langle i \rangle, \quad (6.21)$$

где под  $\langle \Phi \rangle$  будем понимать суммарный средний за полупериод поток, пересекающий проводящую дополнительную тонкую плёнку, который формируется внешним переменным магнитным полем  $B_0$  и магнитным полем отклика вещества  $B_1$ . Под значением  $\langle i \rangle$  будем понимать среднее значение переменного тока одного направления за полупериод. Тогда коэффициент пропорциональности между ними ( $L_\Phi$ ) будет играть роль средней потоковой индуктивности дополнительной тонкой пленки.

Поток внешнего переменного магнитного поля имеет вид

$$\Phi_0 = B_0 \pi R^2 \cos \omega t, \quad (6.22)$$

а поток переменного магнитного поля отклика вещества вычисляется из соотношения

$$\Phi_1 = \int_s \vec{B}_1 d\vec{s} = -\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R B_{1*} \frac{r^2}{R^2} dr = -\frac{\sigma \pi R^2}{2} B_{1*} \sin \omega t. \quad (6.23)$$

Среднее значение суммарного потока за полупериод имеет вид

$$\langle \Phi \rangle = \langle \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_1 \rangle, \quad (6.24)$$

где

$$\langle \Phi_0 \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} B_0 \pi R^2 \cos \omega t dt = 0, \quad (6.25)$$

причем

$$\langle \Phi_1 \rangle = -\frac{2\sigma}{T} \int_0^{T/2} B_{1*} \pi R^2 \sin \omega t dt / 2 = -\sigma R^2 B_{1*}. \quad (6.26)$$

Подставляя (6.25) и (6.26) в (6.24) с учётом связи (6.21), получим

$$L_{\Phi} = \langle \Phi \rangle / \langle i \rangle = -\frac{\sigma \pi R^2 B_{1*}}{2i_*} = \pm \frac{\mu_0 \pi R^2}{2h_2}. \quad (6.27)$$

Из (6.27) следует, что средняя за полупериод потоковая индуктивность  $L_{\Phi}$  дополнительной тонкой пленки не зависит от частоты и может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Как показывают эксперименты, величины  $R$  и  $h_2$  – должны соответствовать элементарному токовому вихрю, который возбуждается в дополнительной тонкой плёнке. При соотношении  $h_2 < R$  толщина дополнительной тонкой плёнки  $h_2$  будет совпадать с толщиной элементарного токового вихря в дополнительной тонкой плёнке только для случая, когда толщина дополнительной тонкой плёнки  $h_2$  меньше одного микрона. При этих условиях реализуется положительная частотно-независимая потоковая индуктивность, а вихревые токи Фуко проявляют свои неожиданные парамагнитные свойства.

Если толщина дополнительной тонкой плёнки  $h_2 > 1$  мкм и условие  $h_2 < R$  не выполнено, то возможны случаи, когда проводящий цилиндр из дополнительной тонкой плёнки находится, либо в состоянии отрицательной частотно-независимой индуктивности (токи Фуко проявляют свои диамагнитные свойства наиболее сильно в макроскопических масштабах), либо в состоянии частотно-зависимой динамической индуктивности, которая обращается в нуль на двух характеристических частотах.

В таблице 6.1 приведены значения потоковой индуктивности  $L_{\Phi}$ , рассчитанные из (6.21), которые можно реализовать в системе на кристалле для дополнительной тонкой плёнки радиусом  $R=50$  мкм.

Таблица 6.1

Зависимость потоковой индуктивности  $L_{\Phi}$  дополнительной тонкой плёнки от ее толщины  $h_2$

$h_2$ , нм	50	100	150	200	250	300	350
$L_{\Phi}$ , нГн	100	50	33,3	25	20	16,7	14,3

При этом удельное сопротивление дополнительной тонкой плёнки не влияет на величину индуктивности между выводами 1 и 2, а изменяет только частотный диапазон, в котором такая индуктивность будет оставаться постоянной. Данный диапазон частот можно оценить из условия  $0,1f_* < f < 10f_*$ , где  $f_*$  – масштаб частоты системы (6.20) «виток (токовое кольцо) – дополнительная тонкая пленка».

Значения масштаба частоты, зависящего от удельного сопротивления дополнительной тонкой плёнки, рассчитанные из соотношения (6.20), представлены в таблице 6.2. При расчётах использовались данные справочника [58].

Таблица 6.2

Зависимость масштаба частоты, приведенной к выводам 1,2 системы «виток (токовое кольцо) – дополнительная тонкая пленка» от свойств материала дополнительной тонкой плёнки

N п/п	Материал	Удельное сопротивление, ом·м	Масштаб частоты, Гц
1	медь	$15,5 \cdot 10^{-9}$	$3,14 \cdot 10^6$
2	алюминий	$25,0 \cdot 10^{-9}$	$5,0 \cdot 10^6$
3	вольфрам	$48,9 \cdot 10^{-9}$	$10,0 \cdot 10^6$
4	никель	$61,4 \cdot 10^{-9}$	$12,4 \cdot 10^6$
5	нихром	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$203 \cdot 10^6$
6	кремний электронный (KEF)	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$203 \cdot 10^9$

Из таблиц 6.1 и 6.2 видно, что использование, например, алюминия при напылении дополнительной тонкой плёнки радиусом  $R=50$  мкм и толщиной  $h_2=100$  нм позволяет получить вносимую индуктивность дополнительной тонкой плёнки  $L_{\phi}=50$  нГн, приведенную к выводам 1 и 2 предлагаемой интегральной индуктивности. Такая дополнительная тонкая плёнка будет обеспечивать частотно-независимую индуктивность в диапазоне частот от 0,5 до 50 МГц.

Применение дополнительной тонкой плёнки из нихрома для тех же геометрических размеров позволит обеспечить постоянство индуктивности в диапазоне от 20 МГц до 2 ГГц; из меди - от 0,3 до 30 МГц; из вольфрама - от 1 до 100 МГц; из никеля - от 1,2 до 120 МГц; из нихрома - от 20 МГц до 2 ГГц; из кремния - от 20 ГГц до 2 ТГц.

В современных СВЧ микросхемах приемлемой для многих применений величиной интегральной индуктивности является значение в 10 нГн. В таблице 6.3 приведены толщины  $h_2$  дополнительной тонкой плёнки в нанометрах и соответствующий ей радиус  $R$  в микрометрах, который даёт данное фиксированное значение индуктивности дополнительной тонкой плёнки в 10 нГн.

Таблица 6.3

Геометрические размеры дополнительной тонкой плёнки для получения индуктивности 10 нГн, приведенной к выводам 1 и 2

$h_2$ , нм	50	100	150	200	250
$R$ , мкм	16	23	28	32	36
$h_2$ , нм	300	350	400	450	500
$R$ , мкм	39	42	45	48	50

Расчёты для толщины дополнительной тонкой плёнки больше 500 нм не приводятся в связи с тем, что элементарный токовый вихрь в дополнительной тонкой пленке в таком случае может оказаться нестабильным и перейти в другое частотно-зависимое состояние динамической индуктивности.

Данные табл. 6.3 указывает на возможность дальнейшего уменьшения площади, занимаемой интегральной индуктивностью с предлагаемой конструкцией. Такое уменьшение может привести к достижению предельных значений поверхностной плотности индуктивности вплоть до  $9,8 \text{ Гн/м}^2$ .

Результаты компьютерного моделирования, представленные в таблицах 6.1 и 6.2, подтверждают решение поставленной задачи: при изменении толщины дополнительной тонкой плёнки от 50 нм до 350 нм предлагаемая индуктивность изменяется в диапазоне от 100 до 14 нГн, что значительно лучше (в 5-50 раз) максимальной индуктивности одновитковых известных конструкций, достигаемых в одном слое.

Таким образом, предлагаемая конструкция интегральной индуктивности имеет существенные преимущества в сравнении с известными техническими решениями. За счет обнаруженных наноэффектов она позволяет реализовать в  $5\div 50$  раз более высокие значения индуктивности, но только при строго определенных значениях толщин  $h_2 \ll h_1$ . С другой стороны, выбор материала, из которого создается дополнительная тонкая пленка, позволяет «сдвигать» в заданный частотный диапазон рабочий диапазон частот предлагаемой индуктивности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение вынесены наиболее весомые результаты работы. В первом разделе отчёта собраны аннотации наиболее интересных на наш взгляд публикаций по современным методам расчёта интегральных индуктивностей, имеющих микроскопические размеры, и их практической реализации. Приведены достигнутые на современном этапе технологии геометрические размеры и значения величины микроскопической индуктивности для систем на кристалле и интегральных микросхем.

Предложен аналитический метод расчёта статической планарной индуктивности для нулевого фазового сдвига, существующего между током и потоком. Исследованы магнитные и индуктивные свойства планарного токового 2D-кольца с азимутальной ориентацией в пространстве вектора плотности тока. Получены распределения магнитных полей внутри и вне кольца. Рассчитана потоковая часть индуктивности токового кольца с конечной радиальной толщиной и её добротность. Проведено моделирование частотных свойств индуктивности токового кольца в симуляторе *HFSS – Ansoft*, сделаны сравнения с результатами: эксперимента, моделирования и аналитических вычислений.

Рассчитан коэффициент увеличения планарной индуктивности, который можно достигнуть применением 2D-спиралей Архимеда и обобщённых спиралей. Для этого построена физико-математическая модель расчёта магнитного поля и индуктивности спиралей. Сделаны расчёты для различного числа витков и различных начальных и конечных радиусов спиралей Архимеда и обобщённых спиралей.

Разработаны алгоритмы расчёта погонных 3-D индуктивностей цилиндрической симметрии с аксиальным направлением в пространстве плотности тока. Для этого исследованы магнитные и индуктивные свойства полого и круглого цилиндрических проводников с током. Получены распределения магнитных полей и их индуктивность. Введён параметр обрезания поля. Рассчитана добротность индуктивности цилиндрического проводника.

Исследованы индукционные и индуктивные свойства коаксиального кабеля. Получены радиальные распределения векторного потенциала и индукции магнитного поля внутри коаксиального кабеля. Предложен метод управления индуктивностью коаксиального кабеля для со-направленных и встречных токов в центральной жиле и оплётке.

Разработаны аналитические методы расчёта интегральных индуктивностей для микросхем и систем на кристалле. Для этого исследованы индукционные и индуктивные свойства трубчатого проводящего цилиндра с азимутальным направлением в пространстве вектора плотности вихревого тока. Из энергетического баланса в системе получена частотная зависимость вносимой интегральной индуктивности



трубчатого проводящего цилиндра. Рассчитаны основные физические параметры цилиндров с малой радиальной толщиной и приведены значения величины вносимой индуктивности проводящего цилиндра конечной толщины.

Выполнен учёт влияния магнитных свойств токов Фуко и омических потерь на значение вносимой индуктивности сплошного немагнитного цилиндра. Выяснены его частотные свойства. Показано, что индуктивность такого цилиндра для низкого, и высокого по сравнению с масштабом частоты, частотного диапазона может быть положительная (проявляется парамагнетизм токов Фуко) и может быть отрицательная в среднечастотной области (проявляется диамагнетизм токов Фуко). Исследовано влияние на частотную зависимость индуктивности радиальной составляющей магнитного поля отклика вещества.

Проведены теоретические исследования физических свойств индуктивности ленточных микро-соленоидов. Введены понятия эталонной индуктивности и индуктивностей с малым и большим потокосцеплением. Рассчитаны добротности и объёмные плотности индуктивности соленоида в микро- и нано-размерах. Предложен способ увеличения частоты среза ленточного микросоленоида.

Исследованы физические свойства планарной индуктивности типа «наноразмерная плёнка в токовом кольце». Результаты компьютерного моделирования по соотношениям, представленных в разделе, подтверждают возможность получения интегральной индуктивности с высокой объёмной плотностью. Показано, что изменение толщины проводящей тонкой плёнки от 50 нм до 350 нм приводит к изменению индуктивности в диапазоне от 100 до 14 нГн, что значительно лучше (в 5-50 раз) максимальной индуктивности одновитковых известных конструкций, достигаемых в одном слое.

Предлагаемая в разделе конструкция интегральной индуктивности имеет существенные преимущества в сравнении с известными техническими решениями. За счет обнаруженных наноэффектов она позволяет реализовать в  $5\div 50$  раз более высокие значения индуктивности. Выбор удельного сопротивления проводящего материала, из которого создается дополнительная тонкая пленка, позволяет «сдвигать» в заданный частотный диапазон рабочий диапазон частот предлагаемой индуктивности.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Коротков А.С. Интегральные (микроэлектронные) радиоприёмные устройства систем связи: обзор/ А.С.Коротков//Микроэлектроника. – 2006. –Т.35. -№4. – С.285-305.
2. Nguen N.M. Si IC-compatible inductors and LC passive filter/N.M.Nguen, R.G.Meyer//IEEE j. Solid State Circuits. Aug. 1990. – V.25. – №4. – P. 1028-1031.
3. Cang J.Y.C. Large suspenden inductors and their use in 2-um CMOS RF amplifier// J.Y.C. Cang, A. Abidi, M. Gaitan//IEEE Electron Dev. Lett. May. – 1993. – V.14. - №5. – P.246-256.
4. Widjaja A. and Sarangan A. Method for Fabrication Thin Film Structures with Negative Inductance. Case #: UD-488. US-Patent Pending; Publication # 20090261936. Inventor: Agus-Widjaja, et. al.
5. Schulenberg K.V., Chua C.L., Fork D.K., Lu J.P. & Griffiths B. Palo Alto Research Center. Parc's on-chip microcoil demonstrates world-record performance. Mixed Signal Systems Inc., Scotts Valley.
6. Kuhn W.B. and Ibrahim N.M. Analysis of Current Crowding Effects in Multiturn Spiral Inductors. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. 49, no. 1, pp. 31-38, jan. 2001.
7. Yue C.P. and Wong S.S. On-Chip Spiral Inductors with Patterned Ground Shields for Si-Based RFIC's. IEEE J.Solid State Circuit, vol. 33, no. 5, p.p. 743-752, may 1999.
8. Scuderi A., Ragonese E., Biondi T., Palmisano G. "Integrated Inductors and Transformers", CRC Press. Taylor & Francis Group, New York. 2011. - P.151.
9. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчёт индуктивностей: справочная книга. – М: Энергоатомиздат, 1986, с. 488.
10. Эннс В.И., Кобзев Ю.М. Проектирование аналоговых КМОП-микросхем. Краткий справочник разработчика. Под ред. канд. техн. наук В.И.Эннса. М: Горячая линия – Телеком. 2005, с. 455.
11. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. Учеб. Пособие. – М.: Высшая школа, 1983. – 463 с.
12. Rejaei, B. A predictive model for Si-based circular spiral inductors / B. Rejaei, J. L. Tauritz, P. Snoeij. // Proc. Topical Meeting on Silicon Monolithic Integrated Circuits in RF Systems, 1998. – Pp. 148-154 DOI: [10.1109/SMIC.1998.750210](https://doi.org/10.1109/SMIC.1998.750210)
- 13.Nguyen, N.M. Si IC-compatible inductors and LC passive filters / N.M. Nguyen, R.G. Meyer // IEEE J. Solid-State Circuits, 1990. – Vol. 25. – Pp. 1028-1031 DOI: [10.1109/4.58301](https://doi.org/10.1109/4.58301)
- 14.Merril, R.B. Optimization of high Q integrated inductors for multi-level metal CMOS / R.B. Merrill, T.W. Lee, H. You, R. Rasmussen, L.A.

Moberly // Proc. Tech. Dig. Int. Electron Devices Meet. (IEDM), 1995. – Pp. 983-986 DOI: [10.1109/IEDM.1995.499381](https://doi.org/10.1109/IEDM.1995.499381)

15. Burghartz, J.N. Microwave inductors and capacitors in standard multi-level interconnect silicon technology / J.N. Burghartz, M. Soyuer, and K.A. Jenkins, // IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1996. – Vol. 44. – Pp. 100-104 DOI: [10.1109/22.481391](https://doi.org/10.1109/22.481391)

16. Greenhouse, H.M. Design of planar rectangular microelectronic inductors // IEEE Trans. PHP, 1974. – Vol. 10. – Pp. 101-109 DOI: [10.1109/TPHP.1974.1134841](https://doi.org/10.1109/TPHP.1974.1134841)

17. Arnold R.G. Microwave characterization of micro strip lines and spiral inductors in MCM-D technology / R.G. Arnold and D.J. Pedder, // IEEE Components, Hybrids, and Manufacturing Technology, 1992. – Vol. 15. – Pp. 1038-1045 DOI: [10.1109/33.206928](https://doi.org/10.1109/33.206928)

18. Klemmer, N. **Inductance calculations for MCM system design and simulation** / N. Klemmer // IEEE Multi Chap Module Conf. (MCMC'95), 1995. – Pp. 81-86 DOI: [10.1109/MCMC.1995.512008](https://doi.org/10.1109/MCMC.1995.512008)

19. Cangellaris, A.C. Frequency-dependent inductance and resistance calculation for three-dimensional structures in high-speed interconnect systems / A.C. Cangellaris, J.L. Prince, L.P. Vakanas // IEEE Components, Hybrids, and Manufacturing Technology, 1990. – Vol. 13. – Pp. 154-159 DOI: [10.1109/33.52864](https://doi.org/10.1109/33.52864)

20. Tang, C.-C. Miniature 3D inductors in standard CMOS process / C.-C. Tang, C.-H. Wu, and S.-I. Liu, // IEEE J. Solid-State Circuits, Apr. 2002. – Vol. 37. – No. 4. – Pp. 471–480 DOI: [10.1109/4.991385](https://doi.org/10.1109/4.991385)

21. Yue, C.P. A physical model for planar spiral inductors on silicon / C.P. Yue, C. Ryu, J. Lau, T.H. Lee, et al. // IEEE International Electron Devices Meeting (IEDM'96), 1996. – Pp. 155–158 DOI: [10.1109/IEDM.1996.553144](https://doi.org/10.1109/IEDM.1996.553144)

22. Yue, C.P. On-chip spiral inductors with patterned ground shields for Si-based RF IC's / C.P. Yue, S.S. Wong, // IEEE VLSI Circuits, 1997. – Vol. 33. – Pp. 743–752 DOI: [10.1109/VLSIC.1997.623819](https://doi.org/10.1109/VLSIC.1997.623819)

23. Raskin, J. P. Substrate crosstalk reduction using SOI technology / J.-P. Raskin, A. Viviani, D. Flandre, J. Colinge // IEEE Transactions On Electronics Devices, Dec 1997. – Vol. 44. – Pp. 2252-2261 DOI: [10.1109/16.644646](https://doi.org/10.1109/16.644646)

24. Watson, A.C. A comprehensive compact-modeling methodology for spiral inductors in silicon-based RFICs / A.C. Watson, D. Melendy, P. Francis, K. Hwang and A. Weisshaar // IEEE Trans. Microw. Theory Tech., 2004 – Vol. 52. – No. 3. – Pp. 849 -857 DOI: [10.1109/TMTT.2004.823594](https://doi.org/10.1109/TMTT.2004.823594)

25. Long, J. R. The modeling, design, and characterization of monolithic inductors for silicon RF IC's / J.R. Long, M.A. Copeland // IEEE J. Solid-State Circuits, Mar. 1997. – Vol. 32. – Pp. 357–368 DOI: [10.1109/4.557634](https://doi.org/10.1109/4.557634)

26. Mohan, S. S. Simple accurate expressions for planar spiral inductors / S.S. Mohan, M.d.M. Hershensen, S.P. Boyd, T. H. Lee // IEEE J. Solid-State Circuits, Oct. 1999. – Vol. 34. – Pp. 1419–1424 DOI: [10.1109/4.792620](https://doi.org/10.1109/4.792620)

27.Kuhn, W. B. Spiral inductor substrate loss modeling in silicon RFICs / W.B. Kuhn, N. K. Yanduru // IEEE RAWCON, 1998. – Pp. 305–308 <http://goo.gl/G62A9E>

28.Burghartz, J. N. Spiral inductors and transmission lines in silicon technology using copper-damascene interconnects and low-loss substrates / J. N. Burghartz, D. C. Edelstein, K. A. Jenkins, Y. H. Kwark // IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Oct. 1997. – Vol. 45. – Pp. 1961–1968 DOI: [10.1109/22.641804](https://doi.org/10.1109/22.641804)

29.Cao, Y. Frequency-independent equivalent circuit model for on-chip spiral inductors / Y. Cao, R. A. Groves, N. D. Zamdmer, J.-O. Plouchart, R. A. Wachnik, X. Huang, T.-J. King, and C. Hu // Proc. IEEE Custom Integrated Circuits Conf., May 2002. – Pp. 217–220 DOI: [10.1109/CICC.2002.1012800](https://doi.org/10.1109/CICC.2002.1012800)

30.Melendy, D. Modeling of on-chip spiral inductors for silicon RFICs / D. Melendy // M.S. thesis, Dept. Elect. Comput. Eng., Oregon State Univ., Corvallis, OR, 2002. <https://goo.gl/gQU4fp>

31.Watson, A. Analysis and modeling of single-ended and differential spiral inductors in silicon-based RFICs / A. Watson // M.S. thesis, Dept. Elect. Eng. Comput. Sci., Oregon State Univ., Corvallis, OR, 2003. <https://goo.gl/g1DtyT>

32.Watson, A. Wide-band distributed modeling of spiral inductors in RFICs / A. Watson, P. Francis, K. Hwang, A. Weisshaar // IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig., June 2003. – Pp. 1011–1014 DOI: [10.1109/MWSYM.2003.1212540](https://doi.org/10.1109/MWSYM.2003.1212540)

33.Crols, J. An analytical model of planar inductors on lowly doped silicon substrates for analog design up to 3 GHz / J. Crols, P. Kinget, J. Craninckx, and M. Steyeart, // Symp. VLSI Circuits Dig. Tech. Papers, 1996. – Pp.28 -29 DOI: [10.1109/VLSIC.1996.507703](https://doi.org/10.1109/VLSIC.1996.507703)

34.Burghartz, J. N. Multilevel-spiral inductors using VLSI interconnect technology / J. N. Burghartz, K. A. Jenkins, and M. Soyuer, // IEEE Electron Device Lett., 1996. – Vol. 17. – Pp.428 -430 DOI: [10.1109/55.536282](https://doi.org/10.1109/55.536282)

35.Kuhn, W.B. Analysis of Current Crowding Effects in Multiturn / W.B. Kuhn, N.M. Ibrahim, // IEEE Microwave Theory and Techniques, 2001. – Vol. 49. Is. 1. – Pp: 31-38, DOI: [10.1109/22.899959](https://doi.org/10.1109/22.899959)

36.Ahn, Y.-G. Efficient Scalable Modeling of Double- $\pi$  Equivalent Circuit for On-Chip Spiral Inductors / Y.-G. Ahn; S.-K. Kim; J.-H. Chun; B.-S. Kim // IEEE Microwave Theory and Techniques, 2009. – Vol. 57. – Is. 10. Pp. 2289-2300 DOI: [10.1109/TMTT.2009.2029026](https://doi.org/10.1109/TMTT.2009.2029026)

37.Mohan, S.S. Simple Accurate Expressions for Planar Spiral Inductances / Mohan, S.S. ; del Mar Hershenon, M. ; Boyd, S.P. ; Lee, T.H. // IEEE J. Solid-State Circuits, 1999 – Vol. 34. – Is. 10. – Pp. 1419 – 1424 DOI: [10.1109/4.792620](https://doi.org/10.1109/4.792620)

38.De Roest, D. Some Measurement Results for Frequency-Dependent Inductance of IC Interconnects on a Lossy Silicon Substrate / D. De Roest, H.

Ymeri, S. Vandenberghe, M. Stucchi, D. Schreurs, K. Maex, B. Nauwelaers, // IEEE Electron Device Letters, 2002. – Vol. 23. – Is. 2. – Pp. 103-104, DOI: [10.1109/55.981320](https://doi.org/10.1109/55.981320)

39.Sato, T. A magnetic thin film inductor and its application to a MHz switching dc-dc converter / T. Sato, H. Tomita, A. Sawabe, T. Inoue, T. Mizoguchi, M. Sahashi // IEEE Magnetics, 1994. – Vol. 30. – Is. 2. – Pp. 217-223, DOI: [10.1109/20.312261](https://doi.org/10.1109/20.312261)

40.Büyüktas, K. A New Process for On-Chip Inductors with High Q-Factor Performance / K. Büyüktas, K. Koller, K.-H. Müller, A. Geiselbrechtinger // International Journal of Microwave Science and Technology, 2010. – Vol. 2010 – Pp. 1-9 DOI: [10.1155/2010/517187](https://doi.org/10.1155/2010/517187)

41.Korenivski, V. GHz magnetic film inductors / V. Korenivski // Journal of Magnetism and Magnetic Materials, June 2000. – Vol. 215–216. – Pp. 800–806 DOI: [10.1016/S0304-8853\(00\)00292-4](https://doi.org/10.1016/S0304-8853(00)00292-4)

42.Ragonese, E. A lumped scalable physics-based model for silicon spiral inductors / E. Ragonese, T. Biondi, Ang. Scuderi, G. Palmisano // IEEE 10th International Symposium Electron Devices for Microwave and Optoelectronic Applications (EDMO), 2002. – Pp. 119 - 124 DOI: [10.1109/EDMO.2002.1174941](https://doi.org/10.1109/EDMO.2002.1174941)

43. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.//Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. Главная редакция физико - математической литературы. 1981 г. с. 798.

44. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами.//Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. М: Наука. Главная редакция физико- математической литературы. 1979 г. с. 830.

45.Конев Д.Н., Будяков А.С., Прокопенко Н.Н.//Автоматизированное проектирование интегральных катушек индуктивности для аналоговой микроэлектроники СВЧ диапазона. Учебно-методическое пособие. Шахты, Изд-во ЮРГУЭС, 2007, — 101 с.

46. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Марчук В.И. Поточная индуктивность плоского проводящего кольца с азимутальной плотностью тока. Успехи современной радиоэлектроники», №5, 2013, - с.68-72.

47. V.G.Sapogin, N.N.Prokopenko. Flux Inductance of Plane Conducting Ring with Azimuth Density of Current. International Conference on Signals and Electronic Systems 2014, Poznan, Poland. 11-13 september 2014. ICSES 2014\_2779.pdf.

48. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Манжула В.Г. О расчёте коэффициента увеличения планарной индуктивности спирального типа//Фундаментальные исследования. №11(часть 6), 2013. – С.1150-1153.

49. В.Г. Сапогин, Н.Н. Прокопенко, В.И. Марчук. Погонная индуктивность цилиндрических проводников с аксиальной плотностью

тока в сложных функциональных блоках. Инженерный вестник Дона» №4/1, 2012 г. <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4t1y2012/1264>

50. V.G.Sapogin, N.N.Prokopenko. Running Inductance of Cylindrical Conductors with Axial Current Density. ICSES 2014\_9718.pdf.

51. Сапогин В.Г., Манжула В.Г. Управление погонной индуктивностью коаксиального кабеля с аксиальной плотностью токов. Фундаментальные исследования №5 (часть 5). 2014 г. – С. 984-989.

52. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978 г.

53. В.Г.Сапогин, Н.Н.Прокопенко, В.Г.Манжула, Н.Е.Сапунцов, Е.Е.Нестюрина. Индуктивность сплошного проводящего цилиндра с азимутальной плотностью вихревого тока в низкочастотной области. Фундаментальные исследования. №11 (часть 3), 2013. С. 441-446.

54. В.Г.Сапогин, Н.Н.Прокопенко, В.И.Марчук, В.Г.Манжула, А.С.Будяков. Индуктивные свойства микроскопического проводящего кольца с плотностью вихревого тока азимутального направления. Нано- и микросистемная техника. 2014, №1. С. 22-26.

55. В.Г.Сапогин, Н.Н.Прокопенко, Н.Е.Сапунцов. Индуктивность цилиндрической плёнки с азимутальной плотностью вихревого тока. Материалы международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения». Т.II. Саратов, Россия, 25-26 сентября 2014 г. С. 358-365.

56. Vladimir G. Sapogin, Nikolay N. Prokopenko and Ludmila K. Sapogina. Solution of Solitary Current Inductor's "Cutoff Frequency Problem" for EHF Applications. The International IEEE Conference on Microwaves, Communications, Antennas and Electronic Systems (COMCAS-2015). David Intercontinental Hotel 2-4 november 2015 Tel Aviv, Israel. 978-1-4799-7473-3/15/\$31.00 ©2015 IEEE. 107774.pdf.

57. Сапогин В.Г., Прокопенко Н.Н., Будяков А.С. Физические свойства интегральной индуктивности ленточного MEMS– соленоида на СВЧ//24-я Международная Крымская конференция «СВЧ техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо'2014). Севастополь, 7-13 сентября 2014 г.: материалы конф. в 2 т. – Севастополь: Вебер, 2014. – С.643-644.

58. Физические величины. Справочник//А.П. Бабичев, Н.А.Бабушкина, А.М. Братковский и др.; Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. Москва. Энергоатомиздат. 1991 г. – 1232 с.